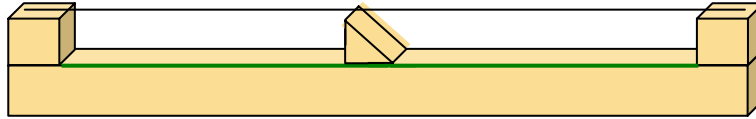


LA SCALA PITAGORICA (e altre scale)

IL MONOCORDO

I Greci, già circa 500 anni prima dell'inizio dell'era cristiana, utilizzavano un semplice strumento: il monocordo.



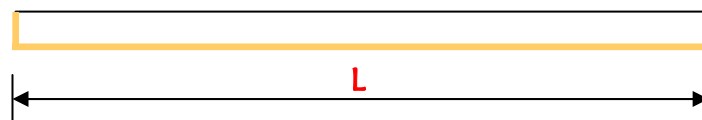
Nel monocordo, un ponticello mobile permette di spostare uno degli estremi della corda in un qualsiasi punto, così da variare a piacimento la lunghezza della parte di corda che si intende suonare. Ovviamente,

- l'altezza del suono prodotto è inversamente proporzionale alla lunghezza della parte di corda suonata;
- il suono prodotto da corde diverse (per spessore o materiale) è diverso;
- l'altezza del suono prodotto è direttamente proporzionale alla tensione della corda.

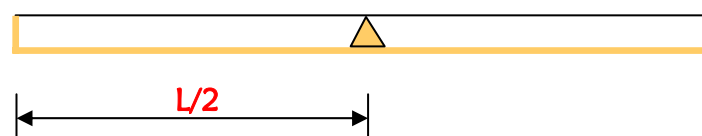
INTERVALLI MUSICALI

In musica l'intervallo è la distanza tra due suoni, cioè un rapporto numerico. Per trovare sul monocordo il rapporto numerico a cui corrisponde un determinato intervallo basterà dividere la lunghezza della corda libera (il primo tra i due suoni prodotti) per la lunghezza della corda che ha prodotto il secondo suono (la lunghezza minore corrisponde sempre al secondo termine del rapporto numerico!).

L'intervallo di **ottava** è quello che si ottiene suonando dapprima la corda in assenza di ponticello (cioè "a corda libera"):



quindi, suonandola mettendo il ponticello a metà della corda.



$$L : L/2 = 1 : \frac{1}{2} = 2 : 1$$

Noi siamo abituati a chiamare "ottava" questo tipo di intervallo, perché nella scala musicale che utilizziamo, due note uguali consecutive - contando anche gli estremi - distano tra loro

otto note. I greci invece definivano questo intervallo “diapason”. L'etimologia del termine deriva infatti dal greco "*diá pasôn*" con il significato di “attraverso tutte (le note)”.

Essendo questo l'intervallo di massima consonanza, tutte le culture basano le loro scale su di esso, anche se lo dividono in maniera differente da noi: gli indiani lo dividono in 22 parti, gli arabi in 17 ed i cinesi in 5.

L'ottava è l'intervallo tra una nota musicale ed la stessa nota avente frequenza doppia (ottava sopra) o pari alla metà (ottava sotto), ad esempio:

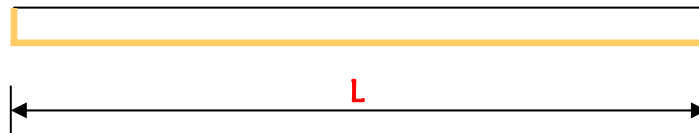
LA centrale = frequenza 440 Hz

LA un'ottava sopra = frequenza 880 Hz

LA un'ottava sotto = frequenza 220 Hz

Il rapporto tra le frequenze di due note separate da un'ottava è perciò di **2:1**.

L'intervallo di **quinta perfetta** si ottiene suonando dapprima la corda in assenza di ponticello (cioè “a corda libera”):



quindi, suonandola mettendo il ponticello ai $\frac{2}{3}$ della corda.



$$L : \frac{2}{3}L = 3 : 2$$

I greci chiamavano questo intervallo “*diapente*”.

L'intervallo di **quarta perfetta** è dato dal rapporto

$$\frac{2}{1} : \frac{3}{2} = \frac{4}{3}$$

I greci chiamavano questo intervallo “*diatesson*”.

LA SCALA PITAGORICA

Una scala è una successione di note (in ordine ascendente o discendente) collocate secondo criteri che tengono presenti le consonanze degli intervalli.

I pitagorici proposero una scala musicale composta da sette note costruita attraverso la progressione di intervalli di quinta.

La costruzione della scala pitagorica prevede di partire dai rapporti numerici corrispondenti ai diversi intervalli: 1/1, 4/3, 3/2, 2/1

Per trovare quali altri rapporti numerici, compresi tra 1 e 2, corrispondono a delle note si segue la seguente procedura:

- 1) Uno alla volta, si prendono i **rapporti numerici noti** e **li si moltiplica e li si divide per 3/2.***
- 2) Se il risultato è >2, lo si divide per due, se invece è <1, lo si moltiplica per 2.**

NOTE:

*Moltiplicare o dividere per 3/2 corrisponde ad alzare o abbassare la nota di riferimento (corrispondente al rapporto numerico in esame) per quinte.

**Moltiplicare o dividere il risultato ottenuto per 2 permette di ottenere solo note all'interno di un'unica ottava (o diapason).

DO	RE	MI	FA	SOL	LA	SI	DO'	RE'
	1/1			4/3	3/2			2/1

$$\cancel{1/1} \times 3/2 = 3/2$$

$$\cancel{1/1} : 3/2 = 2/3 < 1 \rightarrow \times 2 = 4/3$$

$$\cancel{4/3} \times 3/2 = 2/1$$

$$4/3 : 3/2 = 8/9 < 1 \rightarrow \times 2 = 16/9$$

$$3/2 \times 3/2 = 9/4 > 2 \rightarrow : 2 = 9/8$$

$$\cancel{3/2} : 3/2 = 1/1$$

$$\cancel{2/1} \times 3/2 = 3/1 > 2 \rightarrow : 2 = 3/2$$

$$\cancel{2/1} : 3/2 = 4/3$$

NOTA: sono stati cancellati i passaggi che portano a risultati già noti.

Riassumendo, i rapporti numerici compresi tra 1 e 2 corrispondenti a note sono: 1/1, 9/8, 4/3, 3/2, 16/9, 2/1

Le prime cinque note formano una scala pentatonica.

DO	RE	MI	FA	SOL	LA	SI	DO'	RE'
	1/1	9/8		4/3	3/2		16/9	2/1

Applicando la procedura iniziale ai due rapporti numerici appena ottenuti si ottengono altre due note:

$$9/8 \times 3/2 = 27/16$$

$$\cancel{9/8} : 3/2 = 3/4 < 1 \rightarrow \times 2 = 3/2$$

$$\cancel{16/9} \times 3/2 = 8/3 > 2 \rightarrow : 2 = 4/3$$

$$16/9 : 3/2 = 32/27$$

DO	RE	MI	FA	SOL	LA	SI	DO'	RE'
	1/1	9/8	32/27	4/3	3/2	27/16	16/9	2/1

In questo modo si ottiene una scala composta da sette note, ovvero una scala diatonica.

Sappiamo che esistono 7 note che si possono mettere in scala una dopo l'altra. Ci sono però moltissimi modi di costruire scale diverse, a seconda della nota di partenza ed a seconda di un sacco di dettagli che fanno la gioia dei musicisti – e la disperazione dei fisici. Una delle prime scale che si ricordano – o che immaginiamo possano essere ricordate – è appunto quella di Pitagora che propone una sequenza basata su intervalli di quinta ($3/2$) iniziando da una certa nota. Possiamo pensare di partire dal “do” (come è ragionevole fare visto che tutti sanno che le note “iniziano con il do”). In realtà dare i soliti nomi alle note “do, re, mi ...” è una procedura abbastanza convenzionale, non degna di nota scientifica. Per la verità, nella costruzione della scala pitagorica, sarebbe molto meglio evitare di usare i nomi delle note perché prima o poi finiranno per mancare le “note giuste” – anzi i loro nomi – per completare o “chiudere” la scala. Se tuttavia si decide di usarle – ad esempio perché senza questi riferimenti i ragazzi non riescono a seguire il ragionamento – occorre partire dal re perché così facendo è possibile evitare i discorsi più tecnici dedicati ai più o meno famosi “diesis e bemolle” (i tasti neri del pianoforte). In altre parole: l'idea della scala pitagorica è “perfetta” da un punto di vista matematico ma alquanto “ispida” da un punto di vista musicale (se non altro moderno). Se rinunciamo ai nomi delle note nessun problema a far lavorare la matematica per generare frequenze (altezze, intonazioni) sonore con perfetto significato e prevedibilità Se non si vuole rinunciare agli amici “do re mi fa sol la si” allora occorre sottostare a qualche “peripezia musicale” e partire dal RE e non dal DO. Solo in questo modo il percorso terminerà di nuovo al RE.

COSTRUZIONE DELLA SCALA PITAGORICA SUL MONOCORDO

Partendo dal suono prodotto dalla corda suonata libera (ad esempio, avente lunghezza pari a 60 cm), per ottenere le altre note della scala si deve progredire per intervalli di quinta, ovvero moltiplicare e dividere L (60 cm) per $3/2$, così:

$$60 \times 3/2 = 90$$

$$60 : 3/2 = 40$$

Perché le note così ottenute “cadano” tutte all'interno della stessa ottava, il risultato numerico deve essere compreso tra 30 e 60. Quindi,

Se il risultato è >60 occorre dividere il numero ottenuto per 2.

Se il risultato è <30 occorre moltiplicare il numero ottenuto per 2.

$$60 : \frac{3}{2} = 40$$

$$\downarrow$$

$$40 : \frac{3}{2} = 26,7$$

$$\downarrow$$

$$26,7 \times 2 = 53,4$$

$$\downarrow$$

$$53,4 : \frac{3}{2} = 35,6$$

$$60 \times \frac{3}{2} = 90$$

$$\downarrow$$

$$90 : 2 = 45$$

$$\downarrow$$

$$45 \times \frac{3}{2} = 67,5$$

$$\downarrow$$

$$67,5 : 2 = 33,8$$

$$\downarrow$$

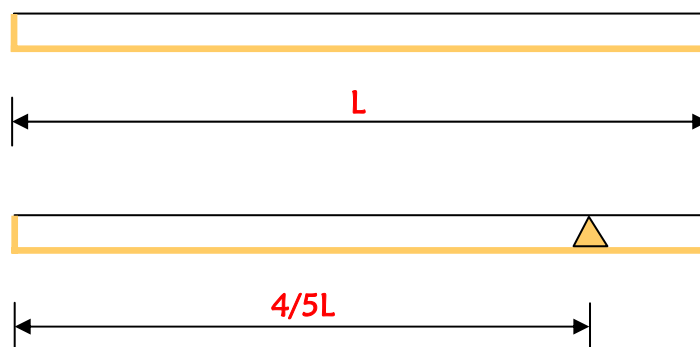
$$33,8 \times \frac{3}{2} = 50,7$$

Per ottenere la sequenza di suoni (da quello più basso a quello più alto) corrispondenti alle note della scala pitagorica basterà ordinare le lunghezze ottenute sopra, dalla maggiore alla minore:

$$60 \quad 50,7 \quad 53,4 \quad 45 \quad 40 \quad 35,6 \quad 33,8 \quad 30$$

ESTENSIONE ALLA SCALA TOLEMAICA

Il sistema pitagorico prevedeva la divisione della corda in 2 parti, in 3, quindi in 4. La novità del sistema tolemaico consiste proprio nella possibilità di andare oltre, e quindi di dividere la corda in 5 parti. Mettendo poi il ponticello mobile ai $\frac{4}{5}$ della corda si ottiene (con procedura analoga a quella adottata per la definizione degli intervalli di ottava e di quinta perfetta) l'intervallo di terza maggiore:



$$L : \frac{4}{5}L = 5 : 4$$

Insieme all'intervallo di terza maggiore si viene a definire la triade maggiore do – mi – sol. Sembra che l'intervallo di terza maggiore non fosse stato ritenuto dai greci abbastanza armonioso e pertanto non meritevole di attenzione.

Introducendo questo nuovo intervallo nell'algoritmo precedente si può costruire la scala tolemaica, detta anche naturale o di giusta intonazione.

Tuttavia, malgrado l'innovazione introdotta da Tolomeo, le teorie pitagoriche sopravvissero almeno fino all'introduzione della polifonia.

Gli schemi pitagorici furono usati soprattutto nella musica liturgica ed il canto gregoriano ne è la testimonianza più conosciuta.

Per costruire la scala diatonica naturale - rispettando l'algoritmo di aumento e diminuzione di intervalli di quinta – si parte dai rapporti numerici 1/1, 5/4, 4/3, 2/1, ovvero presa una nota di partenza, la sequenza che si ottiene considerando le note che distano da questa una terza maggiore, una quinta perfetta e un'ottava (nonché l'intervallo di quarta):

DO	RE	MI	FA	SOL	LA	SI	DO'
1/1		5/4	4/3	3/2			2/1

Per generare le nuove note si utilizza la procedura descritta in precedenza:

- Uno alla volta, si prendono questi rapporti numerici, quindi li si moltiplica e divide per 3/2.
- Se il risultato è >2, lo si divide per due, se invece è <1, lo si moltiplica per 2.

$$1/1 \times 3/2 = 3/2$$

$$1/1 : 3/2 = 2/3 < 1 \rightarrow \times 2 = 4/3$$

$$5/4 \times 3/2 = 15/8$$

$$5/4 : 3/2 = 5/6 < 1 \rightarrow \times 2 = 5/3$$

$$3/2 \times 3/2 = 9/4 > 2 \rightarrow : 2 = 9/8$$

$$3/2 : 3/2 = 1/1$$

$$2/1 \times 3/2 = 3/1 > 2 \rightarrow : 2 = 3/2$$

$$2/1 : 3/2 = 4/3$$

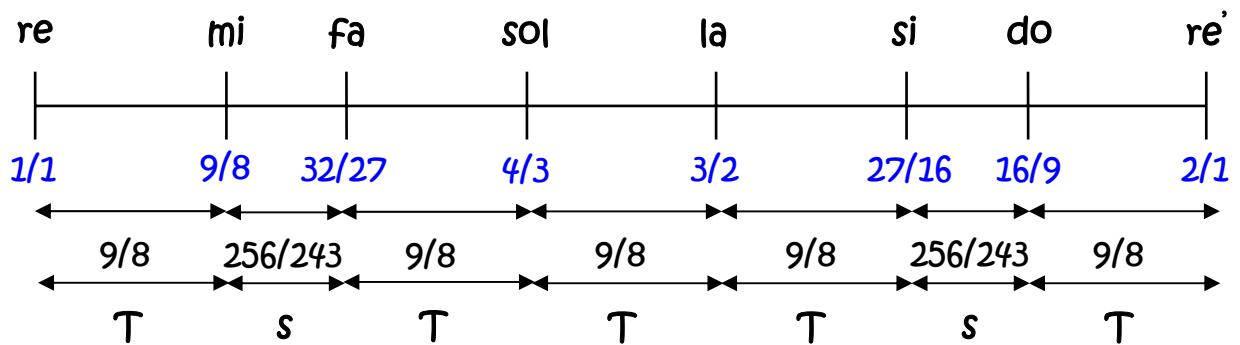
Quindi, inserendo anche il rapporto numerico 4/3 (intervallo di quarta) ottenuto in precedenza, si ottiene nuovamente una scala composta da sette note:

DO	RE	MI	FA	SOL	LA	SI	DO'
1/1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2/1

LE DUE SCALE A CONFRONTO

Scala pitagorica

Le note sono separate da due tipi di intervallo: **T**ono ($9/8$) e **s**emitono ($256/243$).



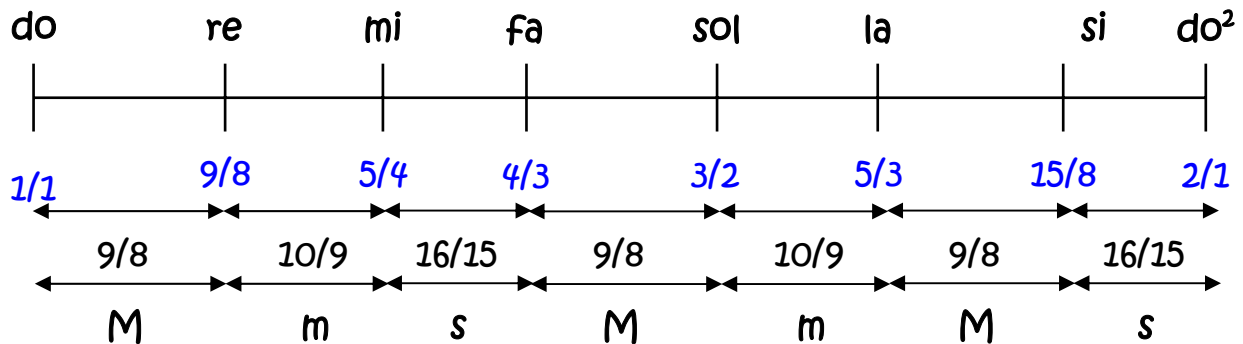
Struttura della scala: **TsTTTTsT**



Fig. 1: illustrazione rappresentativa della struttura della scala pitagorica

Scala diatonica naturale

Le note sono separate da tre tipi di intervallo: tono **M**aggiore ($9/8$) e **m**inore ($10/9$) e **s**emitono ($16/15$).



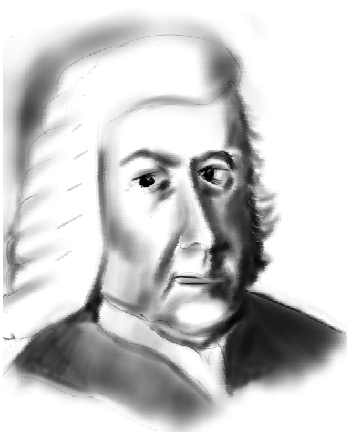
Struttura della scala: **MmsMmMs**

SCALE MUSICALI E CAMBI DI TONALITA'

La scelta della tonalità, ossia della nota che funge da tonica, è un aspetto molto importante da un punto di vista musicale.

Tuttavia, la scala naturale e quella pitagorica non lo permettono facilmente poiché la trasposizione di un pezzo, ad esempio, dalla tonalità di do ad un'altra richiederebbe l'aggiunta di altre note.

LA SCALA BEN TEMPERATA



Il temperamento equabile venne riscoperto (il suo inventore è infatti ignoto) e pubblicato nel 1691 nel testo "Musikalische Temperatur" di Andreas Werckmeister, a sua volta inventore di altri temperamenti.

La proposta di introdurre una scala con intervalli musicali egualmente spazati per qualsiasi scelta della tonica non piacque poiché sembrava andare a discapito dell'armonia.

Johann Sebastian Bach si dimostrò di avviso opposto ritenendo che la possibilità di modulare da una tonalità all'altra e la regolarità nel susseguirsi delle note non fossero fattori deprecabili, bensì garanzia di ordine e trasparenza e, a riprova, compose questa raccolta di 48 preludi e fughe, dove ogni pezzo

è eseguito in tutte le tonalità della scala cromatica temperata di modo maggiore e minore.



Fig. 2: illustrazione rappresentativa della struttura della scala temperata