

Università di Trento

Corso di perfezionamento in fisica moderna

Fondamenti e interpretazioni
della
teoria quantistica

Fabrizio Logiurato

(Versione -1)

Settembre 2004

All things by immortal power,
Near or far,
Hiddenly,
To each other linked are
That thou canst not stir a flower
Without troubling of a star.

Francis Thompson

Indice

Introduzione	1
Capitolo 1	
Il paradosso di Einstein, Podolsky e Rosen	
1.1 Einstein contro Bohr	2
1.2 La meccanica quantistica è una teoria completa?	7
1.3 La risposta di Bohr al paradosso EPR	11
1.4 L'interpretazione di Copenaghen della teoria quantistica	14
1.5 Le teorie a variabili nascoste	15
Capitolo 2	
Gli stati entangled	
2.1 La generalizzazione di Schrödinger del paradosso EPR	17
2.2 La versione di Bohm del paradosso EPR	20
2.3 Il problema della misurazione quantistica	23
2.4 Alcune proprietà degli stati entangled	28
Capitolo 3	
L'interpretazione di Bohm della teoria quantistica	
3.1 L'interpretazione di de Broglie e Bohm	33
3.2 Il potenziale quantistico	34
3.3 I sistemi a multicorpi	41
3.4 La non località nella teoria di Bohm	43
3.5 Il fantasma del gatto di Schrödinger	46
Capitolo 4	
Le disuguaglianze di Bell	
4.1 Il teorema di Bell	49
4.2 La versione di Wigner della disuguaglianza di Bell	53
4.3 Le generalizzazioni del teorema di Bell	56
4.4 Le prime verifiche sperimentali della disuguaglianza di Bell	58
4.5 Il teorema dell'impossibilità di segnali superluminali	61

Capitolo 5

Altre forme di non località

- 5.1 Non località per fase ed impulso 62

Capitolo 6

Contestualità e non località

- 6.1 L'interpretazione statistica della teoria quantistica 67
6.2 Il teorema di Bell, Kochen e Specker 69
6.3 Non località senza disuguaglianze e contestualità 77
6.4 Contestualità e non località nelle disuguaglianze di Bell 82

- Bibliografia 86

Introduzione

Per me l'idea che un corpo possa agire su un altro a distanza, attraverso il vuoto, senza il tramite di qualcos'altro che renda possibile la trasmissione dell'azione e della forza dall'uno all'altro, è una tale assurdità che sono convinto nessun uomo con adeguate capacità di riflettere su problemi scientifici potrà mai accettare.

I. Newton

Ogni teoria è la somma di un formalismo piú un'interpretazione. Dunque non può esistere teoria senza interpretazione, poiché in tal caso il formalismo sarebbe privo di significato fisico. È infatti l'interpretazione che crea la corrispondenza tra i simboli matematici del formalismo e la realtà.

L'interpretazione può essere piú o meno precisa, e il fisico in genere se ne disinteressa, poiché per la maggior parte degli scopi tecnici l'esatta interpretazione di una teoria, quand'anche esistesse, non è necessaria. Ma se desideriamo che la scienza sia qualcosa di piú che pura tecnica, e che esprima qualcosa del mondo che ci circonda, ecco che diviene necessario occuparsi di essa. E come sostenuto da van Fraassen, ogni volta che scopriamo che un'interpretazione è insostenibile, comunque raggiungiamo una migliore comprensione della teoria e quindi della realtà.

Nonostante i suoi immensi successi pratici, l'interpretazione della teoria quantistica continua a suscitare accesi dibattiti. Questo lavoro vuole essere una introduzione ai fondamenti concettuali e ai problemi interpretazionali che essa propone.

Molto spazio sarà dedicato all'analisi di una tra le piú straordinarie proprietà esibite dai sistemi quantistici: la non località. Infatti, come il fondamentale teorema di Bell ha dimostrato, nessun modello che soddisfi le ipotesi di realismo e di località può riprodurre le predizioni della meccanica quantistica.

Il teorema di Bell implica dunque, se la teoria quantistica è sperimentalmente esatta, o l'esistenza di azioni a distanza, oppure l'impossibilità di considerare separati nello spazio sistemi preparati in uno stato entangled. In ogni caso, esso impone una revisione radicale dei nostri concetti di realtà e di spaziotempo.

Capitolo 1

Il paradosso di Einstein, Podolsky e Rosen

Le dispute piú violente sono quelle che vertono su questioni per le quali non c'è alcuna buona prova né a favore né contro.

B. Russell

Il lavoro di Bell rappresenta la diretta continuazione ed il culmine della grande discussione epistemologica sul significato del formalismo quantistico tra Einstein e Bohr. Nel nostro primo capitolo presenteremo una breve esposizione di tale dibattito, delle ragioni che hanno portato Einstein a rifiutare l'interpretazione di Copenaghen, e delle risposte di Bohr alle obiezioni di Einstein.

In particolare, riporteremo l'argomentazione d'incompletezza della teoria quantistica di Einstein, Podolsky e Rosen, punto di partenza di Bell nella dimostrazione del suo famoso teorema sulla non località quantistica. Infine introdurremo il concetto di variabile nascosta.

1.1 Einstein contro Bohr

Secondo l'interpretazione di Copenaghen della teoria quantistica il vettore di stato quantistico costituisce la descrizione piú completa possibile ed immaginabile di un sistema individuale.

Esso specifica le distribuzioni di probabilità per le misurazioni di qualunque osservabile fisica. Tuttavia, al contrario della meccanica statistica classica, il ricorso alla probabilità non è dovuto alla nostra ignoranza delle condizioni iniziali, ma è intrinseca e relativa ad ogni sistema individuale. È ontologica e non epistemica, e ha origine nella natura stessa non deterministica dei fenomeni fisici. Ad osservabili

incompatibili, in accordo con il principio di complementarità, vanno attribuiti prima della misura non valori sconosciuti ma concettualmente non definiti.

L'interpretazione di Copenaghen ebbe in Einstein uno dei suoi più accesi ed importanti critici. Il grande fisico non accettò mai la pretesa completezza della teoria quantistica, anzi per tutta la sua vita espresse la speranza che una più potente teoria potesse superarla, restaurando nella fisica quei concetti di determinismo e realismo che appartenevano alla sua epistemologia.

Quello che ha come protagonisti Einstein e Bohr è uno dei più grandi dibattiti nella storia della scienza, come giustamente fatto notare da Jammer, paragonabile solo alla controversia che vide contrapposti Newton e Leibniz: "In entrambi i casi è stato lo scontro di visioni filosofiche diametralmente opposte, in entrambi i casi è stato lo scontro di due delle più grandi menti del loro tempo" [Jammer p. 120 1974].

Approssimativamente, è possibile rintracciare all'interno della loro disputa due fasi distinte¹.

Una prima fase in cui Einstein rifiuta il principio d'indeterminazione, sia nel suo aspetto formale che concettuale, e tenta di dimostrarne l'erroneità escogitando gedankenexperimente con i quali misurare simultaneamente e con infinita precisione variabili complementari come la posizione e l'impulso.

In una seconda fase egli invece ammette l'impossibilità di falsificare tale principio, ma rimane ancora profondamente insoddisfatto dell'origine non epistemica attribuita da Bohr e Heisenberg alla probabilità quantistica. È allora che Einstein concepisce, insieme ai suoi collaboratori Boris Podolsky e Nathan Rosen, il famoso argomento contro la completezza della meccanica quantistica, oggi largamente conosciuto come paradosso EPR.

Bohr espone per la prima volta il suo concetto di complementarità alla conferenza in onore di Volta tenuta sul lago di Como nel settembre 1927. Tuttavia Einstein non partecipa a quell'incontro, ma i due hanno comunque modo di confrontarsi nel mese successivo a Bruxelles, durante il quinto congresso di fisica dell'istituto Solvay. In quell'anno il meeting è dedicato alla nuova teoria quantistica, lì ha dunque inizio lo scontro tra Einstein e Bohr.

Sebbene la disputa tra Einstein e Bohr sia inizialmente incentrata sul significato della funzione d'onda e delle relazioni d'incertezza, la non località quantistica entra sin da allora nelle loro discussioni più o meno esplicitamente.

Einstein non presenta alcun nuovo lavoro per l'occasione, l'unico contributo ufficiale che gli atti del congresso ricordano è un commento all'interno della discussione generale.

Egli considera un fascio di elettroni diretto contro uno schermo S dotato di una piccolissima apertura O [Jammer 1974 p. 115]. Una pellicola fotografica con la forma di una grande emisfera registra le particelle che riescono ad attraversare

¹ Qui ci limiteremo a ripercorrere solo i tratti salienti del dibattito, per maggiori dettagli rimandiamo all'estesa letteratura, di essa citiamo soltanto il lavoro di Jammer sui fondamenti filosofici della meccanica quantistica, al quale largamente ci siamo ispirati [Jammer 1974].

Questa difficoltà non può essere superata a meno che la descrizione del processo in termini delle onde di Schrödinger non sia supplementata da una qualche dettagliata specificazione della localizzazione della particella durante la sua propagazione. Penso che M. de Broglie stia cercando nella giusta direzione. Se si lavora solo con le onde di Schrödinger, l'interpretazione II della $|\psi(r)|^2$, contraddice la relatività.

Einstein si riferisce alla teoria dell'onda pilota avanzata da de Broglie in quello stesso meeting, con la quale il fisico francese si proponeva di conciliare la visione di Schrödinger di un mondo costituito di sole onde, con l'interpretazione probabilistica e particellare di Born.

Nella teoria di de Broglie la funzione ψ gioca un doppio ruolo, essa non corrisponde solo ad un'onda di probabilità, ma anche ad un'onda reale che accompagna e guida la particella nel suo moto².

L'esempio di Einstein racchiude in nuce tutti i problemi concettuali della teoria quantistica: la questione dell'interpretazione degli stati di sovrapposizione, del processo di misurazione e l'esistenza della non località.

Einstein conclude il suo intervento esponendo alcune osservazioni riguardo alle onde di Schrödinger.

Il fisico austriaco aveva in precedenza affermato come nella sua teoria le onde dovessero sempre considerarsi reali, anche quando definite nello spazio multidimensionale delle configurazioni: infatti, un sistema di N oggetti quantistici in generale non può rappresentarsi con $3N$ funzioni separate delle coordinate di posizione, ma solo con un'unica funzione ψ delle $3N$ variabili $x_1y_1z_1, \dots, x_Ny_Nz_N$, e del tempo.

Per Einstein ciò è in contrasto con l'assunzione che le forze agiscano solo su piccole distanze: la ψ è determinata da un'equazione alla derivate parziali rispetto alle coordinate di posizione e, per esempio, nel caso di due elettroni, il suo valore può dipendere da spostamenti infinitesimali nello spazio delle configurazioni $x_1y_1z_1, x_2y_2z_2$, mentre le due particelle nello spazio ordinario tridimensionale possono essere molto lontane l'una dall'altra.

Secondo la successiva testimonianza di Ehrenfest, riportata da Jammer [1974 p. 117] egli aveva già a quei tempi ben chiaro come l'accettare la realtà di un'onda nello spazio multidimensionale delle configurazioni implicasse nello spazio ordinario l'esistenza di azioni a distanza.

Ma il vero dibattito tra Einstein e Bohr si mantenne al di fuori delle discussioni ufficiali e certamente esso è passato alla storia molto più degli atti formali del meeting. Come ricorderà Bohr vari anni dopo, esso riguardava principalmente la possibilità di misurare simultaneamente due variabili complementari, come la posizione e l'impulso o il tempo e l'energia, con una precisione più grande di quella permessa dalle relazioni d'incertezza di Heisenberg.

Nella disputa con Bohr, Einstein, escogitando una serie di Gedankenexperimente, tenta di attaccare in ogni modo i principi dell'interpretazione di Copenaghen. Per

² Alla descrizione dettagliata del modello di de Broglie, e della sua estensione realizzata da Bohm, dedicheremo il capitolo 3.

Figura 1.2 Nel Gedankenexperiment di Einstein a) la misura dell'impulso trasferito da una particella al primo schermo permette di scoprire quale fenditura del secondo schermo essa ha attraversato. Secondo Einstein, considerando un insieme di particelle, dovrebbe essere possibile osservare simultaneamente sia i loro cammini che le frange d'interferenza da esse formate. In b) è raffigurato il disegno dello schermo mobile realizzato dallo stesso Bohr. Il dispositivo può muoversi verticalmente in modo da poter misurare l'impulso che un elettrone trasferisce ad esso durante il suo attraversamento.

quel che riguarda il contenuto della nostra tesi, qui ci limiteremo a riportare solo uno dei tanti esperimenti immaginati da Einstein.

In esso egli considera la classica esperienza dell'interferenza con lo schermo dotato di due fenditure (figura 1.2a). Come suggeriscono le linee tratteggiate del disegno, l'impulso trasmesso dalle particelle, ad esempio elettroni, al primo schermo durante il loro passaggio, è diverso a seconda che un elettrone attraversi il secondo schermo passando per la fenditura superiore oppure per quella inferiore.

Einstein ipotizza che osservando l'impulso guadagnato dal primo schermo nell'urto con elettrone sia possibile scoprire la direzione di deflessione della particella e pertanto conoscere quale delle fenditure essa ha attraversato.

Ripetendo in successione l'esperimento con un gran numero di particelle dovremmo dunque essere in grado di evidenziare simultaneamente sia l'aspetto particellare che quello ondulatorio della materia, in contraddizione con l'interpretazione di Copenaghen e in particolare col principio di complementarità di Bohr.

Ma, come Bohr dimostra facilmente, l'argomentazione di Einstein non è sostenibile: la misura dell'impulso dello schermo implica necessariamente per il principio d'incertezza un corrispondente errore relativo sulla posizione di quest'ultimo. E l'incertezza sulla conoscenza della posizione del primo schermo rende impossibile l'osservazione dell'interferenza: se a è la distanza tra le due fenditure ed l quella tra gli schermi, una precisione sull'impulso $\Delta p_x < ha/\lambda l$ che permette di individuare la direzione delle particelle implica necessariamente per la posizione dello schermo

un errore $\Delta x > \lambda l/a$ tale da cancellare le frange d'interferenza. Bohr ritiene questo un esempio paradigmatico del principio di complementarità:

Questo punto è di grande importanza logica, poiché solo il fatto che ci troviamo di fronte alla scelta o di tracciare il percorso di una particella o di osservare gli effetti d'interferenza, ci permette di sfuggire alla paradossale necessità di concludere che il comportamento di un elettrone o di un fotone dipenda dalla presenza di una fenditura nel diaframma, attraverso magari non è passato. Vediamo qui un tipico esempio del fatto che i fenomeni complementari si manifestano in esperimenti congegnati in modo tale da escludersi l'un l'altro, e ci troviamo di fronte all'impossibilità di effettuare, nell'analisi degli effetti quantistici, una separazione netta fra un comportamento indipendente degli oggetti atomici e la loro interazione con gli strumenti misuratori che servono a definire le condizioni in cui avvengono i fenomeni.

Einstein non si dà per vinto facilmente, in quell'incontro e nel successivo congresso Solvay del 1930, egli tenta ancora disperatamente di mostrare l'inconsistenza del principio d'indeterminazione e del principio di complementarità escogitando sempre nuovi esperimenti. Ma ogni volta i suoi attacchi naufragano miseramente contro le obiezioni di Bohr.

Il fisico danese diviene dunque l'acclamato vincitore dello scontro con Einstein, e l'interpretazione di Copenaghen s'impone da allora in avanti come l'ortodossia dominante.

1.2 La meccanica quantistica è una teoria completa?

I primi anni del 1930 segnano un decisivo cambiamento del pensiero di Einstein. Dopo i suoi incontri-scontri con Bohr egli si è ormai convinto della consistenza logica della teoria quantistica ma rimane certo riguardo all'incompletezza del suo formalismo.

Nel maggio del 1935, Einstein, insieme a Podolsky e Rosen, pubblica un importante lavoro dal titolo emblematico: "Può la descrizione quantistica della realtà essere considerata completa?". Così gli autori introducono nell'abstract il loro storico lavoro:

In una teoria completa esiste un elemento corrispondente ad ogni elemento di realtà. Una condizione sufficiente per la realtà di una quantità fisica è la possibilità di essere predetta con certezza, senza disturbare il sistema. In meccanica quantistica nel caso di due quantità fisiche descritte da operatori non commutanti, la conoscenza di una preclude la conoscenza dell'altra. Allora o (1) la descrizione della realtà data dalla funzione d'onda in meccanica quantistica è incompleta oppure (2) queste due quantità non possono avere realtà simultanea. Considerazioni riguardo al problema di eseguire previsioni circa un sistema sulla base di misure eseguite su un altro sistema che ha precedentemente interagito con esso, portano a dedurre che se la (1) è falsa allora anche la (2) è falsa. Dobbiamo dunque concludere che la descrizione della realtà data dalla funzione d'onda non è completa.

Einstein, Podolsky e Rosen illustrano quindi i due assunti iniziali:

- (1) **Il criterio di realtà:** “Se senza perturbare in alcun modo un sistema, possiamo predire con certezza (cioè, con probabilità pari ad uno) il valore di una quantità fisica, allora esiste un elemento di realtà corrispondente a questa quantità fisica.”
- (2) **La condizione di completezza:** Una teoria fisica è completa se e solo se “ogni elemento della realtà fisica ha una controparte nella teoria fisica.”

Data una particella nello stato ψ , se ψ è un'autofunzione dell'operatore A , cioè

$$A\psi = a\psi, \quad (1.1)$$

dove a è un suo autovalore, allora l'osservabile A ha con certezza il valore a , e in accordo con il criterio di realtà deve esistere un elemento di realtà corrispondente alla quantità fisica A , cioè a deve essere associato ad una proprietà oggettiva del sistema indipendente dalle nostre osservazioni. Ad esempio, sia

$$\psi = e^{ip_ox/\hbar}, \quad (1.2)$$

dove $p_o \in \mathcal{R}$. Ricordando che l'operatore momento è definito come $\hat{p} = -i\hbar\partial/\partial x$, abbiamo:

$$\hat{p}\psi = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi = p_o\psi. \quad (1.3)$$

La particella ha quindi con certezza l'impulso p_o , perciò il suo momento possiede realtà fisica. Se invece l'equazione agli autovalori (1.1) non è soddisfatta, allora non è possibile assegnare ad A un particolare valore.

Ad esempio, la (1.2) porta ad una predizione certa dell'impulso della particella ma, essendo tutte le sue posizioni equiprobabili, lascia completamente indefinita la sua coordinata spaziale e “secondo l'usuale interpretazione, quando il momento di una particella è conosciuto, la sua coordinata non ha realtà fisica.”

In generale, la meccanica quantistica preclude la possibilità di acquisire l'esatta e simultanea conoscenza di due osservabili A e B che non commutano. In tal caso, per Einstein, Podolsky e Rosen si presentano a noi due sole possibilità, o

la descrizione quantistica della realtà data dalla funzione d'onda non è completa.

oppure

quando gli operatori corrispondenti a due quantità fisiche non commutano, le due quantità non possono avere realtà simultanea.

Infatti, se entrambe le osservabili non commutanti avessero valori ben definiti, per la condizione di completezza di una teoria fisica, questi dovrebbero entrare nella funzione d'onda, ma poiché ciò non si verifica, o le osservabili non hanno valori definiti oppure la funzione d'onda dà una descrizione incompleta della realtà.

Gli autori considerano poi due sistemi I e II che hanno interagito nel passato, ma che dopo un certo intervallo di tempo divengono abbastanza separati da poter considerare trascurabile ogni loro reciproca interazione.

Siano $\{a_n\}$ gli autovalori di una osservabile A relativa al sistema I e $\{u_n(x_1)\}$ le sue corrispondenti autofunzioni.

Lo stato del sistema totale I+II, come funzione della variabile x_1 relativa al sistema I, può allora scriversi come

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_2) u_n(x_1), \quad (1.4)$$

nella quale x_2 è una variabile associata al sistema II. I termini $\psi_n(x_2)$ possono immaginarsi come i coefficienti dello sviluppo di $\Psi(x_1, x_2)$ rispetto alle funzioni ortogonali $\{u_n(x_1)\}$.

Supponiamo di eseguire una misura di A e di trovare il valore a_k . Allora applicando “il processo conosciuto come la riduzione del pacchetto d’onde” si deve dedurre che il primo sistema collassa nello stato $u_k(x_1)$ e il secondo di conseguenza precipita nello stato $\psi_k(x_2)$. Dunque, dopo la misura, la (1.4) si riduce al solo fattore $\psi_k(x_2) u_k(x_1)$.

Lo sviluppo (1.4) è determinato dalla scelta dell’osservabile A . Ad esempio, adottando una nuova osservabile B , con autovalori $\{b_s\}$ e autofunzioni $\{v_s(x_1)\}$, otteniamo per la $\Psi(x_1, x_2)$ la diversa espressione:

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{\infty} \phi_s(x_2) v_s(x_1), \quad (1.5)$$

con dei nuovi coefficienti $\phi_s(x_2)$ per l’espansione.

Se da un’osservazione di B ricaviamo il valore b_r , dobbiamo necessariamente concludere che il sistema I dopo la misura è nello stato $v_r(x_1)$ ed il sistema II è nello stato $\phi_r(x_2)$.

Dunque due diverse osservazioni eseguite sul primo sistema possono lasciare il secondo in due diverse funzioni d’onda. “D’altra parte, poiché al tempo della misura i due sistemi non interagiscono più, nessun reale cambiamento può accadere sul secondo sistema in conseguenza di qualcosa che può essere fatto sul primo sistema”. Dobbiamo allora dedurre che, contrariamente all’assunzione di completezza, è possibile assegnare simultaneamente due stati diversi ψ_k e ϕ_r ad uno stesso sistema fisico.

Gli autori, per meglio chiarire la loro argomentazione, costruiscono quindi un esempio specifico. Essi considerano una coppia di particelle preparate nello stato:

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{i(x_1 - x_2 + x_0)p}{\hbar} \right] dp. \quad (1.6)$$

La (1.6) può anche scriversi

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{-i(x_2 - x_0)p}{\hbar}\right] \cdot \exp\left(\frac{ix_1 p}{\hbar}\right) dp. \quad (1.7)$$

Mentre nel passaggio allo spettro continuo, la (1.4) si trasforma nella versione integrale:

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_p(x_2) u_p(x_1) dp. \quad (1.8)$$

Confrontando la (1.7) con la (1.8) si deduce come sia possibile porre:

$$u_p(x_1) = \exp\left(\frac{ix_1 p}{\hbar}\right), \quad \psi_p(x_2) = \exp\left[\frac{-i(x_2 - x_0)p}{\hbar}\right], \quad (1.9)$$

dove $u_p(x_1)$ è l'autofunzione dell'operatore impulso $P_1 = -i\hbar\partial/\partial x_1$ per la particella 1 con autovalore $p_1 = p$, mentre $\psi_p(x_2)$ è l'autofunzione dell'operatore impulso per la particella 2 con autovalore $p_2 = -p$.

Quindi, assumendo che le due particelle siano distanti e non interagenti, se una misurazione dell'impulso della particella 1 dà il valore p , e perciò riduce la funzione d'onda $\Psi(x_1, x_2)$ allo stato fattorizzato $\psi_p(x_2)u_p(x_1)$, possiamo predire con certezza e senza disturbare in alcun modo la particella 2, che una misura dell'impulso di quest'ultima darà il valore $-p$.

Paragonando invece lo sviluppo

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_x(x_2) u_x(x_1) dx, \quad (1.10)$$

con la (1.6) scritta nella forma:

$$\begin{aligned} \Psi(x_1, x_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{i(x - x_2 + x_0)p}{\hbar}\right] dp \right\} \delta(x_1 - x) dx \\ &= h \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_2 + x_0) \delta(x_1 - x) dx, \end{aligned}$$

abbiamo:

$$u_x(x_1) = \delta(x_1 - x), \quad \psi_x(x_2) = h\delta(x - x_2 + x_0),$$

dove $u_x(x_1)$ è l'autofunzione dell'operatore $Q_1 = x_1$ avente autovalore $x_1 = x$, mentre $\psi_x(x_2)$ è l'autofunzione di $Q_2 = x_2$ con autovalore $x_2 = x + x_0$.

Pertanto, se da una misurazione della posizione della particella 1 otteniamo il valore x , la funzione d'onda $\Psi(x_1, x_2)$ si riduce al solo fattore $\psi_x(x_2)u_x(x_1)$, ed è quindi possibile inferire con certezza, senza disturbarla in alcun modo, che la particella 2 sarà trovata nel punto $x + x_0$. Allora, in accordo con il criterio di realtà, l'impulso e la posizione devono essere simultaneamente elementi di realtà della particella 2. E poiché questi elementi di realtà non compaiono nella funzione

d'onda, dobbiamo concludere necessariamente, secondo EPR, che la descrizione della realtà dovuta al formalismo quantistico è incompleta.

Nella loro argomentazione EPR utilizzano esplicitamente il criterio di realtà (1) e la condizione di completezza (2), ed in modo implicito l'assunzione di località:

- (3) **L'ipotesi di località.** Se “al tempo della misura . . . due sistemi non interagiscono più, nessun reale cambiamento può avvenire sul secondo sistema in conseguenza di qualcosa che può esser fatto sul primo sistema”.

Ma riguardo all'assunzione (3) Einstein tornerà in seguito più volte evidenziando con forza la natura non locale dell'interpretazione di Copenaghen della teoria quantistica. Ad esempio, diversi anni più tardi [Einstein 1949] riassumendo la versione del paradosso EPR secondo l'interpretazione di Copenaghen, egli scriverà:

Se i sistemi parziali A e B formano un sistema totale che è descritto dalla sua funzione ψ , cioè dalla ψ_{AB} , non c'è ragione di attribuire un'esistenza reciprocamente indipendente (stato di realtà) ai sistemi parziali A e B considerati separatamente, neppure se i sistemi parziali sono separati spazialmente l'uno dall'altro nel momento particolare che viene considerato. Dire che, in quest'ultimo caso, la reale situazione di B non possa essere (direttamente) influenzata, da nessuna operazione di misura compiuta su A è quindi, nel quadro della teoria quantistica, un'affermazione infondata e (come dimostra il paradosso) inaccettabile.

Considerando la questione in questo modo, risulta evidente che il paradosso³ ci costringe ad abbandonare una delle due seguenti affermazioni:

- 1) *la descrizione compiuta per mezzo della funzione ψ è completa,*
- 2) *gli stati reali di oggetti spazialmente separati sono indipendenti l'uno dall'altro.*

L'unica maniera per Einstein di evitare le “azioni spettrali a distanza” implicate dal collasso della funzione d'onda, considerato come un reale processo fisico, è ammettere che gli oggetti quantistici abbiano simultaneamente le osservabili posizione ed impulso ben definite, anche se da noi non conoscibili a causa delle relazioni d'incertezza, e accettare che la funzione d'onda non si riferisca a sistemi individuali ma ad insiemi di sistemi.

1.3 La risposta di Bohr al paradosso EPR

La replica di Bohr al paradosso EPR venne pubblicata pochi mesi dopo dalla stampa dell'articolo di Einstein, Podolsky e Rosen. In modo provocatorio, il fisico danese scelse per il proprio lavoro esattamente il medesimo titolo utilizzato da quegli autori.

³ L'introduzione del termine “paradosso” si deve proprio ad Einstein, il quale si riferì con questo appellativo all'argomentazione di incompletezza in una lettera a Schrödinger del 1935. Il termine continuò poi ad essere successivamente utilizzato sia da Einstein che da Schrödinger [Home, Selleri 1991].

La risposta di Bohr non è che un sommario del suo concetto di complementarità. Nell'abstract del suo articolo leggiamo infatti:

È mostrato che un certo criterio di realtà formulato in un recente articolo dal titolo sopra citato di A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen contiene un'essenziale ambiguità quando applicato ai fenomeni quantistici. A questo riguardo un punto di vista chiamato complementarità è spiegato secondo il quale la descrizione quantistica dei fenomeni fisici sembra soddisfare tutte le razionali richieste di completezza [Bohr 1935].

Egli mette in discussione non la correttezza dell'argomentazione EPR, ma le premesse stesse sulle quali essa si sviluppa. Secondo Bohr, il paradosso EPR "svela solo l'essenziale inadeguatezza del punto di vista ordinario della filosofia naturale circa la spiegazione razionale dei fenomeni fisici di cui ci interessiamo nella meccanica quantistica". La nuova teoria impone una rinuncia definitiva all'idea classica di causalità e un cambiamento radicale della nostra nozione di realtà fisica. L'essenza dell'obiezione di Bohr ad EPR si riassume tutta nel seguente brano:

Dal nostro punto di vista risulta chiaro che la formulazione del summenzionato criterio di realtà fisica proposto da Einstein, Podolsky e Rosen contiene un'ambiguità per ciò che riguarda l'espressione 'senza turbare in alcun modo un sistema'. Naturalmente, in un caso come quello or ora considerato, non si tratta di una perturbazione meccanica del sistema in esame durante l'ultimo stadio critico del procedimento di misura. Ma anche in questo stadio la questione fondamentale resta quella di un'influenza sulle condizioni stesse che definiscono i possibili tipi di previsione sul comportamento futuro del sistema. Poiché queste condizioni costituiscono un elemento intrinseco della descrizione di qualsiasi fenomeno che si possa legittimamente indicare col termine 'realtà fisica', ne deriva che il ragionamento dei summenzionati autori non li autorizza a concludere che la descrizione meccanico-quantistica sia sostanzialmente incompleta [Bohr 1935].

Non è facile comprendere esattamente il pensiero di Bohr, quando egli dice che non si tratta di una perturbazione meccanica ma di un'influenza sulle condizioni che definiscono i possibili tipi di previsione, sembra affermare che la meccanica quantistica è una teoria completa perché essa contiene tutte le possibili previsioni circa il comportamento futuro del sistema che è possibile estrarre da una teoria fisica.

Tuttavia, EPR non pongono in questione la capacità predittiva della meccanica quantistica, quanto la possibilità che le previsioni si riferiscano a proprietà preesistenti all'osservazione.

I passaggi successivi chiariscono forse meglio la filosofia di Bohr. Secondo Bohr, tutte le nostre misure non possono che essere preparate, eseguite ed espresse in modo classico. Questa è una condizione inevitabile imposta dalla nostra natura macroscopica.

Inoltre, poiché la realtà è a noi accessibile solo attraverso l'esperienza sensibile, la fisica deve riguardare esclusivamente gli atti di osservazione. Ad essa cioè non si

può chiedere di cogliere l'essenza del reale, ma solo di stabilire relazioni tra i diversi aspetti della nostra esperienza.

Dunque non si può ascrivere una realtà indipendente ai fenomeni fisici: la parola fenomeno deve essere utilizzata esclusivamente con riferimento alle sole osservazioni ottenute sotto ben specificate circostanze sperimentali. Inoltre, l'esistenza del quanto d'azione implica una reciproca ed incontrollabile interazione tra l'oggetto misurato e lo strumento di misura che rende indistinta la separazione tra proprietà dell'apparato di misura e proprietà dell'oggetto misurato. Non è allora possibile considerare reali le proprietà degli oggetti in maniera disgiunta dallo strumento di misura atto a misurarle. Gli elementi di realtà si possono associare solo ad atti di osservazione effettivamente eseguiti.

Allora, la conclusione di EPR, secondo Bohr, che la posizione e l'impulso corrispondono ad elementi di realtà simultaneamente esistenti "contiene un'ambiguità essenziale" poiché non siamo in grado di eseguire misurazioni simultanee di grandezze complementari come la posizione e l'impulso. E senza misurazione, non ci è possibile assegnare alcun elemento di realtà.

Nel problema trattato da EPR, afferma Bohr, non c'è nulla di nuovo, la rappresentazione dello stato di un sistema che consiste di due oggetti interagenti corrisponde a quella già trattata nella descrizione degli apparati strumentali introdotti durante la discussione della complementarità.

Bohr riprende infatti l'esperimento della doppia fenditura e del diaframma mobile trattato nel primo paragrafo:

Se ... prendiamo come parti del sistema una particella e un diaframma vediamo che le possibilità di specificare lo stato della particella compiendo misurazioni sul diaframma corrispondono esattamente alla situazione [del paradosso EPR] ... noi siamo in linea di principio liberi di scegliere se misurare la posizione del diaframma o il suo impulso, e in ogni caso di fare previsioni sulle successive osservazioni che riguardano la particella. Come abbiamo ripetutamente fatto notare, il punto principale sta nel fatto che tali misurazioni richiedono congegni sperimentali che s'escludono a vicenda [Bohr 1949].

Il carattere reciprocamente incompatibile dei due schemi sperimentali permette la definizione non contraddittoria di quantità fisiche complementari come la posizione e l'impulso. Quindi, secondo Bohr, sono le condizioni sperimentali stesse che definiscono la realtà fisica dei sistemi.

Allora la meccanica quantistica è completa nel senso che semplicemente un sistema non possiede le proprietà che la teoria non consente di misurare.

Einstein, Podolsky e Rosen erano certamente consapevoli di questa possibile obiezione di Bohr, ed infatti al termine del loro articolo essi scrivono:

Si potrebbero porre in discussione queste conclusioni sulla base del fatto che il nostro criterio di realtà non è sufficientemente restrittivo. Invero, non si sarebbe giunti alla nostra conclusione insistendo sul fatto che due o più quantità fisiche possono essere considerate elementi simultanei di realtà solo quando esse possono

essere misurate o previste contemporaneamente. *Da questo punto di vista, poiché si possono prevedere le quantità P e Q solo separatamente, esse non sono contemporaneamente reali. Ciò fa dipendere la realtà di P e Q dal processo di misura attuato sul primo sistema, che non disturba comunque il secondo sistema. Nessuna ragionevole definizione della realtà può portare all'idea che ciò sia possibile [Einstein et al. 1935].*

Dunque il loro rifiuto del punto di vista di Bohr si fonda proprio sull'assunzione che accettarlo implicherebbe ammettere la possibilità che gli elementi di realtà possano essere creati a distanza, in contrasto con il principio di località.

1.4 L'interpretazione di Copenaghen della teoria quantistica

Riassumiamo brevemente i punti essenziali dell'interpretazione di Copenaghen della teoria quantistica:

- (1) Il vettore di stato costituisce una descrizione completa dello stato di un sistema fisico individuale. Esso determina la distribuzione di probabilità dei risultati di una misurazione di qualunque grandezza osservabile.
- (2) La nostra conoscenza della realtà non può essere espressa che per mezzo del linguaggio classico. Ma una descrizione completa dei fenomeni fisici richiede l'uso di concetti classici contrapposti, quali ad esempio quelli di onda e di particella. Nessuna contraddizione nasce dal loro uso poiché concetti incompatibili descrivono fenomeni che si presentano in situazioni sperimentali incompatibili. Questo è il nucleo del principio di complementarità.
- (3) Il principio d'indeterminazione nega l'esistenza simultanea di valori definiti per le osservabili complementari.
- (4) L'osservazione produce un cambiamento discontinuo del vettore di stato non descritto dall'equazione di Schrödinger. Nella misurazione lo stato del sistema collassa in uno degli autostati dell'osservabile misurata. Lo stato finale può essere previsto solo probabilisticamente. L'apparato di misura deve essere descritto in termini classici.

L'assunzione fondamentale dell'interpretazione di Copenaghen è certamente la completezza dello stato quantistico: esso esprime tutto ciò che può essere detto riguardo allo stato fisico del sistema, e al contrario della descrizione classica dello stato di un sistema nello spazio delle configurazioni, dà soltanto le probabilità che le misure abbiano un certo esito. Il ricorso alle probabilità non è il riflesso della nostra mancanza di conoscenza e non è dovuto all'aver trascurato dei dettagli nella descrizione della dinamica: è invece il processo di misurazione stesso ad essere intrinsecamente non deterministico.

Così anche le relazioni d'incertezza esprimono non la nostra ignoranza circa valori di posizione ed impulso ben definiti ma sconosciuti, ma l'impossibilità stessa di definire simultaneamente quei concetti.

Un ruolo centrale nella filosofia di Bohr è assunto dal principio di complementarità. I fenomeni fisici sotto differenti condizioni sperimentali richiedono differenti concetti classici per la loro descrizione, ma

qualunque data applicazione dei concetti classici preclude l'uso simultaneo di altri concetti classici che in diversa connessione sono ugualmente necessari per la descrizione dei fenomeni (Bohr, citato in [Wheeler, Zurek 1983 p. 3]).

Nessuna contraddizione nasce nell'utilizzo di modelli contraddittori, poiché essi descrivono osservazioni ottenute con schemi sperimentali che si escludono tra loro e pertanto non possono essere utilizzati simultaneamente.

Le relazioni d'incertezza rappresentano la traduzione formale del principio di complementarità, esse segnano i limiti di applicabilità delle variabili classiche complementari: una netta definizione di un'osservabile implica la perdita di definizione di una corrispondente osservabile incompatibile.

1.5 Le teorie a variabili nascoste

Consideriamo un insieme A di sistemi identicamente preparati in un dato stato. Il risultato di una misurazione dell'osservabile A su un sistema individuale sarà certamente uno degli autovalori a_i di A . In generale, sarà impossibile predire con certezza quale tra gli autovalori a_i saranno assunti dall'osservabile dopo la misura, a meno che il sistema non sia stato preparato in un autostato di A . Infatti, ciò che la teoria quantistica ci permette di predire è solamente la probabilità che un certo autovalore venga osservato.

La necessità della descrizione statistica del comportamento dei sistemi quantistici è certamente una delle caratteristiche fondamentali della meccanica quantistica. Ma l'uso della teoria statistica non è limitato al solo campo dei fenomeni quantistici, infatti anche nella fisica classica si hanno spesso situazioni in cui si presenta la necessità di una descrizione probabilistica: si pensi ad esempio alla teoria cinetica dei gas, nella quale l'elevato numero di atomi e molecole coinvolto rende impossibile l'esatta conoscenza delle condizioni iniziali del sistema. Anche in tal caso l'approccio deterministico della descrizione newtoniana risulta impraticabile.

Tuttavia, al contrario dell'interpretazione di Copenaghen, agli atomi e alle molecole della meccanica statistica classica, vengono simultaneamente attribuiti valori ben definiti sia della posizione che dell'impulso, anche se nella pratica difficilmente osservabili.

L'analogia con la teoria classica ha indotto diversi autori, tra cui lo stesso Einstein, a credere che la natura probabilistica della meccanica quantistica non fosse dovuta all'indeterminismo soggiacente della realtà ma semplicemente alla nostra non completa conoscenza delle proprietà dei sistemi individuali e delle variabili dinamiche ad essi associate. Poiché tali variabili non figurano nell'attuale meccanica quantistica, questa, secondo la terminologia di Einstein, deve considerarsi una teoria incompleta:

Io sono, infatti, fermamente convinto che il carattere essenzialmente statistico della teoria quantistica contemporanea dev'essere attribuito unicamente al fatto che essa opera con una descrizione incompleta dei sistemi fisici [Einstein 1949].

D'altra parte, proprio l'argomentazione di incompletezza di Einstein, Podolsky e Rosen, rappresentava una delle principali prove indiziarie riguardo l'esistenza di variabili nascoste. Le correlazioni tra eventi spazialmente separati e l'ipotesi della non esistenza di influenze causali non locali, implicavano per Einstein che i risultati delle misure fossero già determinati dall'istante in cui i sistemi avevano interagito, e che certe variabili dinamiche mantenevano gli stati correlati anche dopo la loro separazione.

Una possibilità per completare la meccanica quantistica potrebbe essere quella di introdurre accanto allo stato ψ dei parametri addizionali λ , sperimentalmente non rivelabili, ma che determinano completamente il comportamento individuale dei sistemi fissando i valori di qualunque misurazione. Le teorie che si prefiggono di completare in tal modo il formalismo quantistico sono denominate a variabili nascoste⁴.

Nel corso degli anni i dissidenti della scuola di Copenaghen hanno ideato varie teorie del genere⁵. In letteratura esse sono classificate come teorie del primo o del secondo tipo, a seconda rispettivamente se a loro sono ascrivibili o meno le medesime previsioni probabilistiche della teoria quantistica [Belinfante 1973].

Nei modelli del primo tipo il comportamento medio delle variabili nascoste, cioè la media delle grandezze osservabili eseguita sopra tutto il dominio delle variabili nascoste, riproduce esattamente le predizioni della teoria quantistica. Essi dunque non possono essere sperimentalmente falsificati senza falsificare la meccanica quantistica stessa. L'esempio più riuscito di teoria del primo tipo è certamente il modello di Bohm, alla cui analisi sarà dedicato il terzo capitolo.

Le teorie a variabili nascoste locali, fornendo previsioni diverse da quelle del formalismo quantistico, come sarà successivamente mostrato col teorema di Bell, sono invece esempi di teorie a variabili nascoste del secondo tipo.

⁴ Secondo Popper, questo termine, ormai entrato nel gergo comune di coloro che si occupano dei fondamenti della teoria quantistica, è stato introdotto per la prima volta da Von Neumann [Popper 1984].

⁵ Per un resoconto dettagliato delle diverse teorie a variabili nascoste escogitate rimandiamo al trattato di Belinfante [1973].

Capitolo 2

Gli stati entangled

“Lo chiamate bastone e fate un’affermazione, lo chiamate non bastone e fate una negazione. Ora, come fareste a chiamarlo, senza né affermare né negare? Su, parlate!” Allora uno dei discepoli uscì dalle file, tolse il bastone di mano al maestro e spezzandolo in due esclamò: “E questo cos’è?”

D. T. Suzuki

Nel presente capitolo ci proponiamo di investigare le caratteristiche di una particolare forma di stato quantistico: lo stato entangled. Come vedremo, in questo e nei prossimi capitoli, esso è coinvolto in modo essenziale nei fenomeni di non località e nei problemi concettuali che affliggono la teoria dei quanti.

Presenteremo l’analisi del paradosso EPR eseguita da Schrödinger e la versione di Bohm di tale paradosso per coppie di particelle di spin $1/2$ nello stato entangled di singoletto. Quindi introdurremo la problematica relativa alla questione del processo di misurazione quantistica, che vede ancora lo stato entangled come protagonista. Termineremo infine con una descrizione di alcune sue proprietà matematiche.

2.1 La generalizzazione di Schrödinger del paradosso EPR

Nello stesso 1935, Schrödinger pubblica una serie di articoli ispirati dal paradosso EPR. Ma, al contrario di Bohr, il contenuto del suo lavoro non è affatto una critica ad Einstein, Podolsky e Rosen, anzi il fisico austriaco condivide fortemente le conclusioni raggiunte da quegli autori. Egli contribuisce alla discussione epistemologica sulla teoria dei quanti con un’analisi formale dello stato coinvolto nell’esempio EPR e con l’ideazione di nuovi interessanti paradossi.

Per Schrödinger l’argomentazione d’incompletezza è una prova evidente della deficienza descrittiva della teoria quantistica: si considerino due sistemi indipendenti,

ciascuno in un ben definito stato iniziale. Dallo stato globale che emerge dalla loro successiva interazione non sarà piú possibile separare gli stati dei singoli sistemi, né assegnare ad ognuno di essi un vettore di stato individuale, anche quando la natura dell'interazione è perfettamente conosciuta.

Questo “entanglement”, termine introdotto per la prima volta da Schrödinger stesso, “non è *una* ma *la* caratteristica della meccanica quantistica, quella che segna la sua piú radicale divergenza da ogni concezione classica”¹.

Naturalmente è possibile rivelare gli stati individuali eseguendo delle misure su ogni singolo sistema. Quello che accade è che un'osservazione su uno solo di essi stabilisce non solo lo stato di quel sistema ma fissa anche lo stato dell'altro, il quale, come nel paradosso EPR, potrebbe trovarsi a una distanza molto elevata dal primo. Come scrive l'autore:

È piuttosto sconcertante che la teoria permetta a un sistema di essere diretto o pilotato in un certo stato oppure in un altro alla mercè dello sperimentatore, indipendentemente dal fatto che egli abbia o no accesso ad esso [Schrödinger 1935].

Tale processo di “disentanglement” è coinvolto in ogni procedura di misurazione e costituisce il nucleo centrale del problema dell'interpretazione quantistica.

Il primo lavoro di Schrödinger riguarda un'estensione formale del paradosso EPR. Egli considera le due equazioni agli autovalori:

$$\begin{aligned} Q\psi(x_1, x_2) &= q_o\psi(x_1, x_2), \\ P\psi(x_1, x_2) &= p_o\psi(x_1, x_2), \end{aligned} \tag{2.1}$$

dove $\psi(x_1, x_2)$ è la funzione d'onda di una coppia di particelle mentre $Q = Q_1 - Q_2$ e $P = P_1 + P_2$ sono gli operatori commutanti introdotti da EPR. Schrödinger dimostra che dato un operatore hermitiano $F(Q_1, P_1)$, funzione delle osservabili Q_1 e P_1 della particella 1, esiste sempre un corrispondente operatore $G(Q_2, P_2)$, analogamente definito per la particella 2, che soddisfa la condizione;

$$[F(Q_1, P_1) - G(Q_2, P_2)]\psi(x_1, x_2) = 0, \tag{2.2}$$

cioè $\psi(x_1, x_2)$ è autofunzione dell'operatore $F - G$ con autovalore zero. Dunque qualunque misura dell'osservabile F sulla particella 1 determinerà completamente lo stato della particella 2 e l'autovalore corrispondente all'osservabile G .

Il teorema di Schrödinger può essere provato semplicemente [Afriat, Selleri 1999 p. 9] ma per la sua dimostrazione rimandiamo alla bibliografia.

Nel medesimo anno Schrödinger costruisce basandosi sul proprio teorema anche una interessante variante del paradosso EPR [de Broglie et al. 1976].

¹ I problemi originati all'interpretazione dello stato entangled erano comunque già noti da tempo. Risale infatti al 1932 la pubblicazione del libro di Von Neumann in cui quest'autore sviluppa in dettaglio la teoria della misurazione quantistica (argomento a cui sarà dedicato un prossimo paragrafo).

Figura 2.1 Schema dell'esperimento immaginato da Schrödinger: due particelle inizialmente indipendenti collidono in una certa regione per poi allontanarsi nuovamente una dall'altra. Dopo l'interazione il sistema totale è in uno stato correlato entangled e dall'osservazione di una delle due particelle possiamo inferire con certezza in quale pacchetto sarà trovata l'altra.

Egli considera una coppia di particelle 1 e 2 inizialmente indipendenti e localizzate in due regioni separate dello spazio $R_o^{(1)}$ e $R_o^{(2)}$. Se lo stato delle particelle al tempo zero è descritto rispettivamente dai pacchetti d'onde $\phi_o(x_1)$ e $\chi_o(x_2)$, la funzione d'onda del sistema totale si fattorizza nel prodotto:

$$\psi_o(x_1, x_2) = \phi_o(x_1) \chi_o(x_2).$$

Le particelle in seguito collidono in una certa regione dello spazio per poi tornare a muoversi liberamente (figura 2.1). Si può assumere che dopo tale interazione ad esse sia permessa tutta una serie di moti possibili compatibili con le leggi di conservazione, e che il loro stato sia descritto da un insieme di pacchetti d'onde correlati $(\phi_1, \chi_1), (\phi_2, \chi_2), \dots, (\phi_k, \chi_k), \dots$, che si propagano rispettivamente nelle regioni disgiunte $(R_1^{(1)}, R_1^{(2)}), (R_2^{(1)}, R_2^{(2)}), \dots, (R_k^{(1)}, R_k^{(2)}), \dots$. Dopo l'interazione dunque il sistema totale è rappresentato dallo stato entangled:

$$\psi_I(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i(x_1) \chi_i(x_2).$$

La teoria quantistica non ci permette di predire con certezza l'esatta posizione in cui sarà rivelata ciascuna delle due particelle. Tuttavia le leggi di conservazione ci danno comunque la possibilità di inferire con certezza, cioè con probabilità pari ad uno, una volta osservata la posizione di una delle due particelle, in quale pacchetto sarà trovata l'altra. Ad esempio, se la particella 1 è rivelata nella regione $R_1^{(1)}$ allora la particella 2 sarà trovata nella regione $R_1^{(2)}$, se invece la 1 è rivelata nella regione $R_k^{(1)}$ allora la 2 sarà trovata in $R_k^{(2)}$, e così via.

Secondo l'interpretazione di Copenaghen, prima della misurazione la particella 1 è potenzialmente presente in tutti i pacchetti d'onde $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k \dots$, e la 2 in tutti i pacchetti d'onde corrispondenti $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_k \dots$. L'osservazione del corpuscolo 1 e la sua localizzazione in una certa regione provoca l'improvvisa localizzazione del corpuscolo 2 nella regione corrispondente. Anche se le particelle sono tra loro molto distanti, non appena la misura viene eseguita il collasso si propaga istantaneamente per tutto il sistema. "Magia!" è la parola adoperata da Schrödinger per commentare questo strano fenomeno.

In una sua lettera, a proposito di tali fenomeni, Schrödinger scrive ad Einstein:

La mia interpretazione è che noi non abbiamo una meccanica quantistica consistente con la teoria della relatività, cioè con una velocità di trasmissione finita di tutte le influenze (Citato da Baggott [1992 p. 102]).

Il modo più semplice di evitare le bizzarre spiegazioni dell'interpretazione di Copenaghen è ammettere che dopo l'interazione le particelle sono già prima dell'atto di misura in due ben definiti pacchetti d'onde e che l'osservazione registra solo i valori preesistenti delle loro posizioni.

In questo caso le particelle sono entità permanentemente localizzate con proprietà indipendenti dai nostri processi di osservazione e dunque il collasso non corrisponde ad una trasformazione fisica del sistema ma riflette soltanto il cambiamento della nostra informazione riguardo ad esse.

2.2 La versione di Bohm del paradosso EPR

Il paradosso EPR non fu soggetto a critiche dal solo punto di vista epistemologico ma anche dal suo lato formale [Jammer 1974 p. 189]. In effetti l'esempio di Einstein, Podolsky e Rosen non è privo di difetti: la sua funzione d'onda è basata su onde piane e le particelle pertanto non sono nettamente localizzate in regioni separate dello spazio ma possono essere presenti ovunque con probabilità costante. Inoltre, lo stato utilizzato non è una soluzione stazionaria dell'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo, e dunque conserva la sua forma soltanto per un dato istante.

Una versione più soddisfacente del paradosso EPR venne sviluppata nel 1951 da David Bohm e da egli esposta all'interno del suo manuale di teoria quantistica, considerato da molti la migliore esposizione della meccanica quantistica secondo i dettami dell'interpretazione di Copenaghen [Bohm 1951].

L'autore considera un oggetto quantistico instabile con spin totale nullo il quale, decadendo, si frammenta in due distinte particelle di spin $1/2$. Egli assume che nel processo di dissociazione sia conservato lo spin totale del sistema e che le particelle viaggino poi lungo opposte direzioni verso due apparati di Stern-Gerlach (figura 2.2). La funzione d'onda del sistema 1+2 è pari dunque a

$$\psi(x_1, x_2) = \psi_1(x_1)\psi_2(x_2)|\chi_o\rangle, \quad (2.17)$$

dove $\psi_1(x_1)$ e $\psi_2(x_2)$ sono rispettivamente le funzioni d'onda nello spazio delle posizioni delle particelle 1 e 2, mentre

Figura 2.2 L'esperimento immaginario di Bohm. Due particelle di spin $1/2$ nello stato di singoletto si propagano in opposte direzioni verso due apparati rivelatori di Stern-Gerlach. La perfetta anti-correlazione dello stato con momento angolare nullo permette di predire con certezza l'esito di una misura di spin di una delle particelle da una misura dello spin dell'altra eseguita lungo la medesima direzione.

$$|\chi_o\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z+\rangle_1|z-\rangle_2 - |z-\rangle_1|z+\rangle_2), \quad (2.18)$$

è lo stato di singoletto associato allo spin totale nullo. I kets $|z+\rangle$ e $|z-\rangle$ sono i due autostati della matrice di Pauli σ_z associata alla componente z dello spin, con autovalori rispettivamente $+1$ e -1 . La parte spaziale della (2.17) include la dipendenza temporale, mentre la sua parte di spin è indipendente dal tempo e dunque mantiene la sua forma durante il moto delle particelle.

Le funzioni $\psi_1(x_1)$ e $\psi_2(x_2)$ si considerano da un certo istante in poi diverse da zero solo in due piccole regioni disgiunte e ben separate dello spazio. Le due particelle dopo quel tempo saranno ben localizzate e lontane una dall'altra, e sarà possibile trascurare qualsiasi effetto conosciuto della loro reciproca interazione.

Supponendo la non esistenza di influenze che si propagano istantaneamente o a distanza, è quindi lecito assumere che in tale situazione la componente dello spin di una delle particelle possa essere misurata senza disturbare in alcun modo le proprietà fisiche dell'altra:

Se al tempo della misurazione ... due sistemi non interagiscono piú, nessun reale cambiamento può avvenire sul secondo sistema in conseguenza di qualcosa che può essere fatto sul primo sistema [Einstein et al. 1935].

L'argomentazione di Bohm procede dalle proprietà dello stato entangled di singoletto. Supponiamo che l'apparato di Stern-Gerlach misuri lo spin della particella 1 lungo la direzione \vec{a} e che esso riveli il valore $+1$. Nello stato di singoletto, la

meccanica quantistica predice per misure dello spin lungo due direzioni parallele una perfetta anticorrelazione:

$$(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a}) \otimes (\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{a})|\chi_o\rangle = (\pm)(\mp)|\chi_o\rangle = -|\chi_o\rangle, \quad (2.19)$$

dunque possiamo affermare con certezza, cioè con probabilità uno, che se sulla particella 2 viene misurato lo spin lungo la stessa direzione \vec{a} , il valore che si ottiene è -1 , come è possibile verificare con una misura diretta. Ma

Se senza disturbare in alcun modo il sistema noi possiamo predire con certezza il valore di una quantità fisica, allora esiste un elemento di realtà corrispondente a questa quantità fisica [Einstein et al. 1935].

E ammettendo che gli elementi di realtà di un sistema non possono essere influenzati o creati a distanza, dobbiamo necessariamente dedurre che il valore dello spin della particella 2 era fissato ancor prima della misura sulla particella 1.

Naturalmente il ragionamento può applicarsi a qualunque altro orientamento diverso da \vec{a} : la simmetria rotazionale dello stato di singoletto permette infatti di predire con certezza l'esito di una seconda misura per qualsiasi coppia di direzioni parallele.

I valori dello spin della particella 2 devono perciò essere predeterminati lungo qualunque direzione dello spazio, in disaccordo con le proprietà quantistiche degli operatori di Pauli non commutanti lungo direzioni non parallele, che proibiscono tale assegnazione.

In definitiva occorre ammettere o che le misure eseguite sul sistema 1 hanno un effetto istantaneo sul sistema 2, creando a distanza il valore del suo spin, oppure che i sistemi possiedano ben definite proprietà indipendentemente dalle osservazioni eseguite. Naturalmente, per Einstein la sola opzione accettabile è la seconda. Ma allora, poichè la funzione d'onda non descrive le proprietà fisiche possedute dai sistemi individuali, la meccanica quantistica non soddisfa il criterio di completezza di una teoria fisica, secondo il quale ogni elemento di realtà deve avere una controparte nella teoria.

2.3 Il problema della misurazione quantistica

La precisa formulazione del processo di misurazione quantistica è stata sviluppata dal matematico Von Neumann [1932].

Ogni misura quantistica può considerarsi come la costruzione di una corrispondenza biunivoca tra le proprietà di un oggetto microscopico e quelle di un oggetto macroscopico accessibile ai nostri sensi. Nel modello di Von Neumann tale concordanza si realizza nella formazione di uno stato entangled delle proprietà del sistema osservato e dell'apparato osservatore, trattato secondo il formalismo quantistico. Illustreremo la trattazione dell'autore nella semplice ed elegante versione dovuta a Cohen-Tannoudji [Grigolini 1993 p. 13].

Supponiamo di voler misurare su un certo sistema quantistico il valore dell'osservabile A . Assumiamo che il dispositivo di misura consista di una particella macroscopica P vincolata a muoversi in uno spazio unidimensionale; indichiamo con x la sua coordinata spaziale. La particella giocherà il ruolo di indice dello strumento di osservazione. Sia

$$H_I = g(t) A \hat{p}, \quad \hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad (2.20)$$

l'hamiltoniana d'interazione tra l'oggetto quantistico e il dispositivo di misurazione, dove $g(t)$ è una funzione reale dipendente dal tempo. L'hamiltoniana del sistema totale è

$$H(t) = H_A + H_P + g(t) A \hat{p}. \quad (2.21)$$

Ipotizziamo ora che al tempo iniziale $t = t_o$ l'oggetto sia in un autostato $|a_n\rangle$ dell'operatore A con autovalore a_n :

$$A|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle, \quad (2.22)$$

e che il sistema macroscopico P sia rappresentato dallo stato $|\phi\rangle$.

Affinché tale sistema funzioni come indice è necessario presumere che la sua funzione d'onda spaziale $\langle x|\phi\rangle = \phi(x)$ sia ben localizzata, e quindi diversa da zero solo in una regione ristretta dello spazio. La natura macroscopica dell'apparato rende l'allargamento del pacchetto del tutto trascurabile durante il processo di rivelazione.

Il sistema totale, al tempo $t = t_o$, quando i due sistemi non hanno ancora interagito, è dunque

$$|\psi(t_o)\rangle = |a_n\rangle|\phi\rangle. \quad (2.23)$$

Eseguiamo la misurazione dell'osservabile A . Assumiamo che l'hamiltoniana d'interazione H_I sia essere diversa da zero solo per un tempo molto breve $\Delta t = t - t_o$, e pertanto che la funzione $g(t)$ sia molto stretta e non nulla soltanto in quell'intervallo temporale. Dall'equazione di Schrödinger abbiamo:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}[(H_A + H_P)(t - t_o) + g A \hat{p}]} |\psi(t_o)\rangle, \quad (2.24)$$

con

$$g = \int_{t_o}^t g(t') dt' . \quad (2.25)$$

Se Δt è molto breve e l'interazione intensa, durante il processo d'osservazione è possibile trascurare gli effetti dell'hamiltoniana imperturbata $H_A + H_P$ sull'evoluzione dello stato $|\psi(t_o)\rangle$. Perciò la (2.24) può scriversi più semplicemente come:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} g A \hat{p}} |\psi(t_o)\rangle ,$$

che, considerando lo stato iniziale (2.23), è pari a

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar} g A \hat{p}} |a_n\rangle |\phi\rangle \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar} g a_n \hat{p}} |a_n\rangle |\phi\rangle , \end{aligned}$$

dove $e^{-\frac{i}{\hbar} g a_n \hat{p}}$ è l'operatore di traslazione che agendo sullo stato dell'indice P ne esegue uno spostamento spaziale di una quantità $a_n g$.

La funzione iniziale $\phi(x)$ dello strumento di osservazione si è trasformata quindi dopo la misura nella nuova funzione d'onda

$$\begin{aligned} \phi_{a_n} &= \langle x | \phi_{a_n} \rangle = \langle x | (e^{-\frac{i}{\hbar} g a_n \hat{p}}) | \phi \rangle \\ &= \phi(x - a_n g) , \end{aligned} \quad (2.26)$$

come si può notare l'indice si è mosso di una quantità proporzionale all'autovalore a_n di A :

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x - a_n g) .$$

Pertanto è ora possibile eseguire una misura della proprietà del sistema microscopico, la quale è stata replicata alla scala macroscopica nell'apparato di misura.

Supponiamo poi che l'oggetto quantistico sia in una generica sovrapposizione degli autostati di A :

$$|M\rangle = \sum_n c_n |a_n\rangle , \quad (2.27)$$

per il principio di sovrapposizione della teoria quantistica, questo è certamente uno stato possibile. Eseguiamo su di esso una misura dell'osservabile A . Dall'analisi precedente sappiamo che nel processo d'interazione tra oggetto e strumento di misura, se l'oggetto è in un autostato di A , avviene l'evoluzione

$$|a_n\rangle |\phi\rangle \longrightarrow |a_n\rangle |\phi_n\rangle . \quad (2.28)$$

Allora, per la linearità dell'equazione di Schrödinger, se il sistema osservato è nello stato di sovrapposizione (2.27), il sistema totale seguirà la trasformazione

$$\left(\sum_n c_n |a_n\rangle\right)|\phi\rangle \longrightarrow \sum_n c_n |a_n\rangle|\phi_n\rangle. \quad (2.29)$$

Lo stato finale nella (2.29) esprime una sovrapposizione nella quale compare anche l'osservabile indice macroscopica: la linearità della teoria quantistica ha dunque portato alla paradossale manifestazione di uno stato di sovrapposizione su scala macroscopica.

Siamo dunque di fronte al problema di stabilire una regola che trasformi lo stato di sovrapposizione nelle misure statistiche delle proprietà del sistema sotto osservazione, cioè di stabilire le condizioni sotto le quali le proprietà del sistema si oggettificano e diventano realmente possedute.

L'interpretazione ortodossa, per uscire da questa emblematica situazione, assume che l'apparato di misura venga considerato come un sistema classico, il quale, posto al di fuori delle leggi quantistiche, è capace di provocare il collasso del vettore di stato. Questo è il punto oscuro dell'interpretazione di Copenaghen: quando un sistema è abbastanza classico da causare il collasso dello stato e cosa provoca tale collasso? Su questo argomento così si è espresso Bell:

La meccanica quantistica soffre di una fondamentale ambiguità che deriva dal fatto che nessuno sa esattamente dove debba collocarsi il confine tra il vago mondo quantistico e il mondo preciso degli eventi specifici. Questo per me è il vero problema della teoria. Dal punto di vista pratico non c'è problema, in pratica siamo sempre in grado di scegliere questo confine giudiziosamente in modo che piccoli spostamenti in un verso o nell'altro non importino molto. Ma ogni volta che introduciamo questo confine, e dobbiamo collocarlo da qualche parte, noi stiamo dividendo arbitrariamente il mondo in due parti e usando due descrizioni del tutto diverse, una per una parte e l'altra per l'altra [Bell 1987].

Introduciamo un secondo strumento che misura lo stato del sistema totale oggetto + primo apparato, la linearità delle interazioni quantistiche porterà anche questo secondo apparato in uno stato di sovrapposizione macroscopica, così accade anche se introduciamo un terzo strumento di misura che osserva lo stato dell'oggetto e i primi due apparati.

In definitiva, possiamo creare tutta una successione di stati di sovrapposizione, la catena di Von Neumann, che comincia dall'oggetto e finisce con l'osservatore O :

$$\left(\sum_n c_n |a_n\rangle\right)|\phi\rangle|\phi'\rangle|\phi''\rangle \dots |O\rangle \longrightarrow \sum_n c_n |a_n\rangle|\phi_n\rangle|\phi'_n\rangle|\phi''_n\rangle \dots |O_n\rangle.$$

Tale catena, secondo Von Neumann, non può avere termine che con l'osservatore: egli, infatti, è l'unico strumento di misura in grado di misurare se stesso. Von Neumann e Wigner hanno allora ipotizzato che sia la coscienza dello sperimentatore a provocare la riduzione del pacchetto d'onde.

Figura 2.3 L’infernale marchingegno ideato da Schrödinger: l’evoluzione lineare del sistema porta ad uno stato di sovrapposizione macroscopica il quale descrive un gatto allo stesso tempo sia vivo che morto.

In questo caso il problema è risolto facendo ricorso a qualcosa ancora piú misterioso della misurazione quantistica stessa.

Schrödinger ha costruito un esempio molto suggestivo del carattere paradossale degli stati di sovrapposizione macroscopica [Schrödinger 1935].

Egli immagina un povero gatto rinchiuso in una scatola. Assieme ad esso vi è un “diabolico marchingegno”: in un contatore Geiger è posta una certa sostanza radioattiva; lo scatto del contatore genera una scarica che attraverso un relay libera un martello, il quale a sua volta provoca la rottura di una fiala contenente del veleno (figura 2.3). Dopo un certo tempo, l’evoluzione lineare dell’equazione di Schrödinger porterà il sistema totale ad uno stato di sovrapposizione macroscopica in cui il gatto è simultaneamente vivo e morto:

$$|\Psi(t)\rangle = a(t)|\psi_a\rangle|G_I\rangle|\text{Gatto morto}\rangle + b(t)|\psi_b\rangle|G_o\rangle|\text{Gatto vivo}\rangle,$$

dove $|G_o\rangle$ indica lo stato del contatore non attivato e la sostanza radioattiva non decaduta e $|\psi_b\rangle$ lo stato della fiala di veleno ancora integra, mentre $|G_I\rangle$ rappresenta il contatore attivato e $|\psi_a\rangle$ la fiala frantumata.

Un altro interessante paradosso sullo stato di sovrapposizione e sulla localizzazione di una particella si deve a de Broglie [Selleri 1987 p. 40].

Consideriamo una scatola B dalle pareti perfettamente riflettenti e divisibile in due sezioni B_1 e B_2 . Assumiamo che essa inizialmente contenga un elettrone. Tale particella avrà quindi una funzione d’onda $\psi(x, t_o)$ non nulla all’interno del solo volume V di B (figura 2.4).

Figura 2.4 Il paradosso delle scatole di de Broglie. a) una scatola B contiene un elettrone. b) la scatola è separata in due sezioni tramite una parete divisoria. c) Le due parti B_1 e B_2 sono trasportate rispettivamente una a Parigi e una a Tokio. Secondo l'interpretazione ortodossa, il sistema si trova in uno stato di sovrapposizione della posizione. Un'osservazione della posizione dell'elettrone in una delle scatole modifica istantaneamente la funzione d'onda corrispondente nell'altra scatola: se, ad esempio, l'elettrone è trovato a Parigi, esso istantaneamente si materializza a Tokio.

Dividiamo la scatola nelle due parti B_1 e B_2 e portiamo B_1 a Parigi e B_2 a Tokio. La nuova funzione d'onda dell'elettrone $\psi'(x, t')$ sarà ora definita nei volumi separati V_1 e V_2 rispettivamente di B_1 e B_2 :

$$\psi'(x, t') = a_1(t')\psi_{\text{Parigi}}(x, t') + a_2(t')\psi_{\text{Tokio}}(x, t').$$

Secondo l'interpretazione di Copenaghen, l'elettrone si troverà allora in uno stato di sovrapposizione della posizione in cui esso è in parte presente in entrambe le scatole.

Supponiamo di aprire la scatola B_1 situata a Parigi al tempo $t > t'$, e di non trovarvi alcun elettrone. L'osservazione del contenuto della scatola cambia istantaneamente la funzione d'onda totale dell'elettrone, il quale sarà trovato con certezza nella scatola B_2 situata a Tokio.

Pertanto, secondo de Broglie, se non desideriamo introdurre l'azione a distanza e considerare la possibilità che una misura di posizione in una scatola a Parigi "materializzi" istantaneamente l'elettrone a Tokio, non ci resta che ammettere che l'elettrone era già in B_2 prima della misura, sin dall'atto di separazione delle scatole. Quindi la funzione d'onda deve rappresentare solo la nostra conoscenza della posizione dell'elettrone, avente un valore ben definito ancor prima della nostra osservazione, anche se a noi ignoto.

Per il fisico francese, paradossi come quelli di Schrödinger o il suo, possono essere facilmente risolti adottando un'interpretazione statistica della funzione d'onda. In

essa il collasso non ha nulla di misterioso e non è un processo fisico, ma corrisponde solamente ad un cambiamento della nostra informazione, in modo del tutto identico a quello che avviene nella teoria della probabilità classica: supponiamo di lanciare in aria una moneta, dopo il lancio, ma prima di osservare il risultato, la probabilità che sia venuta testa è $1/2$, dopo l'osservazione tale probabilità si riduce ad 1 oppure a 0, a seconda che si sia accertata l'uscita dell'evento testa oppure croce. Ma la moneta era in uno stato ben definito di testa o croce ancor prima della nostra verifica.

2.4 Alcune proprietà degli stati entangled

Seguendo la definizione adottata da Schrödinger, la più notevole proprietà dello stato di singoletto è il suo essere entangled, cioè non esprimibile come un solo prodotto di due stati.

Di questa caratteristica è possibile dare una semplice dimostrazione per assurdo [Greenberger et al. 1990]. Introduciamo lo stato:

$$|\phi\rangle = c|u\rangle_1|v\rangle_2 + d|u'\rangle_1|v'\rangle_2, \quad c \neq 0, d \neq 0, \quad (2.30)$$

dove la coppia $|u\rangle_1, |u'\rangle_1$ è una base ortonormale nello spazio degli stati della particella 1, e $|v\rangle_2, |v'\rangle_2$ è l'analoga base per gli stati della particella 2. c e d sono invece due qualsiasi numeri diversi da zero. Assumiamo che $|\phi\rangle$ sia fattorizzabile nel prodotto di due particolari stati $|w\rangle_1, |z\rangle_2$ delle particelle 1 e 2:

$$|\phi\rangle = |w\rangle_1|z\rangle_2. \quad (2.31)$$

Nella base precedentemente introdotta, i kets $|w\rangle_1, |z\rangle_2$ assumeranno la generale espressione:

$$|w\rangle_1 = a|u\rangle_1 + a'|u'\rangle_1, \quad |z\rangle_2 = b|v\rangle_2 + b'|v'\rangle_2. \quad (2.32)$$

Determiniamo il valore delle componenti a, a', b e b' che in funzione di c e d danno lo stato entangled (2.30). Inserendo le (2.32) nella (2.31), abbiamo

$$\begin{aligned} |\phi\rangle = |w\rangle_1|z\rangle_2 &= ab|u\rangle_1|v\rangle_2 + ab'|u\rangle_1|v'\rangle_2 \\ &+ a'b|u'\rangle_1|v\rangle_2 + a'b'|u'\rangle_1|v'\rangle_2. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Confrontando la (2.33) con la (2.30) si deduce che deve necessariamente essere $ab' = a'b = 0$, ma tale relazione implica anche che si realizzi almeno una delle due condizioni $c = ab = 0$ e $d = a'b' = 0$, in contraddizione con le nostre ipotesi iniziali.

Pertanto lo stato entangled (2.30), e quindi anche lo stato di singoletto, non è in alcun modo fattorizzabile come il prodotto di due stati.

Un'ulteriore interessante particolarità dello stato di singoletto, legata alla simmetria sferica dello stato di momento angolare totale nullo, è la sua formale invarianza per rotazione. Consideriamo infatti lo stato

$$|\psi(\hat{n})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\hat{n}+\rangle_1|\hat{n}-\rangle_2 - |\hat{n}-\rangle_1|\hat{n}+\rangle_2), \quad (2.34)$$

dove $|\hat{n}+\rangle_1$, $|\hat{n}-\rangle_1$ e $|\hat{n}+\rangle_2$, $|\hat{n}-\rangle_2$ rappresentano rispettivamente gli stati della particella 1 e della particella 2 lungo una stessa generica direzione \hat{n} . I kets $|\hat{n}+\rangle$ e $|\hat{n}-\rangle$ devono allora soddisfare le equazioni agli autovalori:

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{n}|\hat{n}+\rangle = |\hat{n}+\rangle, \quad \vec{\sigma} \cdot \hat{n}|\hat{n}-\rangle = -|\hat{n}-\rangle, \quad (2.35)$$

dove

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

sono le matrici di Pauli espresse rispetto alla base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, corrispondente agli autostati dello spin lungo la direzione \hat{z} .

Indichiamo con θ e ϕ rispettivamente gli angoli polari e azimutali di \hat{n} rispetto al riferimento x,y,z . Dalle (2.35) seguono facilmente le espressioni degli stati $|\hat{n}+\rangle$ e $|\hat{n}-\rangle$ nella base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$:

$$\begin{aligned} |\hat{n}+\rangle &= +(\cos \theta/2)e^{-i\phi/2}|+\rangle + (\sin \theta/2)e^{i\phi/2}|-\rangle, \\ |\hat{n}-\rangle &= -(\sin \theta/2)e^{-i\phi/2}|+\rangle + (\cos \theta/2)e^{i\phi/2}|-\rangle, \end{aligned} \quad (2.36)$$

inserendo quindi le (2.36) nella (2.34), otteniamo la relazione:

$$\begin{aligned} |\psi(\hat{n})\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_1|-\rangle_2 - |-\rangle_1|+\rangle_2) \\ &\equiv |\psi_S\rangle, \end{aligned} \quad (2.37)$$

che, considerando l'arbitrarietà della direzione iniziale di \hat{n} , dimostra la simmetria sferica dello stato di singoletto.

Richiamiamo anche qualche utile proprietà statistica dello stato di singoletto. Esse, come vedremo, giocheranno un ruolo fondamentale nello studio del significato fisico degli stati entangled.

Riprendiamo nuovamente la coppia di particelle di spin $1/2$ preparata nello stato di singoletto. Indichiamo i possibili valori di una misura dello spin di ciascuna delle particelle con le variabili $+1$ e -1 . Siano poi \hat{n}_1 e \hat{n}_2 rispettivamente le direzioni lungo le quali l'osservabile spin viene misurata. È allora possibile definire le probabilità: $P_{++}^\psi(\hat{n}_1, \hat{n}_2)$, $P_{+-}^\psi(\hat{n}_1, \hat{n}_2)$, $P_{-+}^\psi(\hat{n}_1, \hat{n}_2)$, e $P_{--}^\psi(\hat{n}_1, \hat{n}_2)$, dove, ad esempio $P_{+-}^\psi(\hat{n}_1, \hat{n}_2)$ indica la probabilità congiunta che una misura dello spin sulla particella 1 lungo la direzione \hat{n}_1 dia il valore $+$ e che una misura dello spin della 2 lungo \hat{n}_2 dia $-$. Introduciamo anche la funzione di correlazione $E^\psi(\hat{n}_1, \hat{n}_2)$, definita come il valore aspettato del prodotto delle misure di spin. In termini delle probabilità congiunte abbiamo dunque:

$$E^\psi(\hat{n}_1, \hat{n}_2) = P_{++}^\psi(\hat{n}_1, \hat{n}_2) - P_{+-}^\psi(\hat{n}_1, \hat{n}_2) - P_{-+}^\psi(\hat{n}_1, \hat{n}_2) + P_{--}^\psi(\hat{n}_1, \hat{n}_2). \quad (2.38)$$

Sviluppiamo lo stato di singoletto negli autostati dello spin lungo la direzione \hat{n}_1 :

$$|\psi(\hat{n})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\hat{n}_1+\rangle_1|\hat{n}_1-\rangle_2 - |\hat{n}_1-\rangle_1|\hat{n}_1+\rangle_2). \quad (2.39)$$

Supponiamo che il versore \hat{n}_1 formi con \hat{n}_2 un angolo θ , assumiamo inoltre per semplicità che, con un'adeguata scelta delle coordinate polari, \hat{n}_2 coincida con l'asse polare e che l'angolo azimutale ϕ di \hat{n}_1 sia nullo. Dalle (2.36) seguono allora le relazioni:

$$\begin{aligned} |\hat{n}_1+\rangle_2 &= +(\cos \theta/2)|\hat{n}_2+\rangle_2 + (\sin \theta/2)|\hat{n}_2-\rangle_2, \\ |\hat{n}_1-\rangle_2 &= -(\sin \theta/2)|\hat{n}_2+\rangle_2 + (\cos \theta/2)|\hat{n}_2-\rangle_2, \end{aligned} \quad (2.40)$$

che inserite nella (2.39) trasformano lo stato di singoletto nella forma equivalente:

$$\begin{aligned} |\psi_S\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[-(\sin \theta/2)|\hat{n}_1+\rangle_1|\hat{n}_2+\rangle_2 + (\cos \theta/2)|\hat{n}_1+\rangle_1|\hat{n}_2-\rangle_2 \\ &\quad - (\cos \theta/2)|\hat{n}_1-\rangle_1|\hat{n}_2+\rangle_2 - (\sin \theta/2)|\hat{n}_1-\rangle_1|\hat{n}_2-\rangle_2]. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Analizzando la (2.41) e applicando la regola di Born, si deducono immediatamente le probabilità congiunte:

$$\begin{aligned} P_{++}^\psi(\hat{n}_1, \hat{n}_2) &= P_{--}^\psi(\hat{n}_1, \hat{n}_2) = \frac{1}{2}\sin^2 \theta/2, \\ P_{+-}^\psi(\hat{n}_1, \hat{n}_2) &= P_{-+}^\psi(\hat{n}_1, \hat{n}_2) = \frac{1}{2}\cos^2 \theta/2. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Con le (2.42) la funzione di correlazione diviene

$$\begin{aligned} E^\psi(\hat{n}_1, \hat{n}_2) &= \sin^2 \theta/2 - \cos^2 \theta/2 = -\cos \theta \\ &= -\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Come si evince dalla (2.43), la correlazione dipende dal solo orientamento relativo delle direzioni \hat{n}_1 e \hat{n}_2 , essa cioè riflette la simmetria rotazionale dello stato di singoletto.

Si noti infine che $E^\psi(\hat{n}_1, \hat{n}_2)$ poteva anche calcolarsi direttamente come il valore aspettato:

$$E^\psi(\hat{n}_1, \hat{n}_2) = \langle \psi_S | (\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{n}_1) \cdot (\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{n}_2) | \psi_S \rangle \quad (2.44)$$

del prodotto di operatori $(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{n}_1) \cdot (\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{n}_2)$, essendo $\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{n}_1$ e $\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{n}_2$ rispettivamente gli operatori di spin della particella 1 lungo \hat{n}_1 e della particella 2 lungo \hat{n}_2 .

Essendo sperimentalmente molto piú facile realizzare misure della polarizzazione piuttosto che dello spin, in molti esperimenti le correlazioni quantistiche degli stati entangled sono testate su coppie di fotoni con momento angolare totale nullo:

$$|\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|R_1\rangle|R_2\rangle + |L_1\rangle|L_2\rangle) \quad (2.45a)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|x_1\rangle|x_2\rangle + |y_1\rangle|y_2\rangle), \quad (2.45b)$$

dove $|R\rangle$, $|L\rangle$ rappresentano gli stati di un singolo fotone rispettivamente, con polarizzazione circolare destra e sinistra, mentre $|x\rangle$ e $|y\rangle$ indicano gli stati con polarizzazione lineare lungo gli assi x ed y . Infatti, poiché i fotoni possiedono due soli stati di polarizzazione, l'analisi statistica dello stato di singoletto dei sistemi di spin $1/2$ può direttamente estendersi alle osservazioni di polarizzazione dei fotoni negli stati entangled (2.45).

Deduciamo ad esempio la funzione di correlazione per le polarizzazioni lineari di una coppia di fotoni nello stato (2.45b). Supponiamo di voler calcolare la probabilità che il fotone 1 attraversi un polarizzatore lineare, posto perpendicolarmente alla sua direzione di propagazione, e con asse ottico orientato in modo da formare un angolo θ_1 con l'asse x . Il fotone che riesce ad attraversare il polarizzatore sarà allora nello stato di polarizzazione lineare

$$|\theta_1\rangle_1 = \cos\theta_1|x\rangle_1 + \sin\theta_1|y\rangle_1. \quad (2.46a)$$

Il fotone assorbito sarà naturalmente nello stato ortogonale:

$$|\theta_{1\perp}\rangle_1 = \sin\theta_1|x\rangle_1 - \cos\theta_1|y\rangle_1. \quad (2.46b)$$

Analogamente, se un secondo polarizzatore con orientamento θ_2 è inserito anche trasversalmente al cammino del fotone 2, abbiamo, per il fotone che riesce ad attraversare il polarizzatore, lo stato

$$|\theta_2\rangle_2 = \cos\theta_2|x\rangle_2 + \sin\theta_2|y\rangle_2, \quad (2.47a)$$

e per il fotone corrispondente che viene assorbito:

$$|\theta_{2\perp}\rangle_2 = \sin\theta_2|x\rangle_2 - \cos\theta_2|y\rangle_2. \quad (2.47b)$$

La probabilità congiunta che entrambi i fotoni attraversino i polarizzatori e che quindi siano rivelati negli stati (2.46a) e (2.47a) sarà dunque:

$$\begin{aligned} P_{++}^\psi(\theta_1, \theta_2) &= |(\langle\theta_1|\langle\theta_2|) \cdot |\psi_S\rangle|^2 = |(\langle\theta_1|\langle\theta_2|) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|x_1\rangle|x_2\rangle + |y_1\rangle|y_2\rangle)|^2 \\ &= \frac{1}{4}(1 + \cos 2(\theta_2 - \theta_1)). \end{aligned} \quad (2.48)$$

In modo del tutto simile è possibile derivare anche la probabilità che i fotoni siano rivelati entrambi negli stati di polarizzazione ortogonale agli assi dei polarizzatori:

$$P_{--}^{\psi}(\theta_1, \theta_2) = |(\langle \theta_{1\perp} | \langle \theta_{2\perp} | \cdot |\psi_S\rangle)|^2 = \frac{1}{4}(1 + \cos 2(\theta_2 - \theta_1)), \quad (2.49)$$

e le probabilità congiunte che un fotone sia in uno stato parallelo all'asse ottico del proprio polarizzatore e che l'altro sia invece ortogonale ad esso:

$$\begin{aligned} P_{+-}^{\psi}(\theta_1, \theta_2) &= P_{-+}^{\psi}(\theta_1, \theta_2) = |(\langle \theta_1 | \langle \theta_{2\perp} | \cdot |\psi_S\rangle)|^2 = |(\langle \theta_{1\perp} | \langle \theta_2 | \cdot |\psi_S\rangle)|^2 \\ &= \frac{1}{4}(1 - \cos 2(\theta_2 - \theta_1)). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Allora, per la correlazione (2.38) abbiamo:

$$E^{\psi}(\theta_1, \theta_2) = \cos 2(\theta_2 - \theta_1). \quad (2.51)$$

Come anticipato, la (2.51) ha un andamento del tutto simile alla correlazione dello spin (2.43), eccetto per un fattore 2 che moltiplica l'angolo di orientamento relativo degli stati.

Capitolo 3

L'interpretazione di Bohm della teoria quantistica

La natura ama nascondersi.
Eraclito

La piú conosciuta e la piú coerente teoria a variabili nascoste è certamente quella di Bohm. Anche se questionabile sotto vari punti di vista, essa ha giocato in ogni caso un ruolo importante nel conseguimento di una migliore comprensione concettuale della meccanica quantistica.

Infatti, è dall'analisi del modello di Bohm che Bell ha ricevuto importanti suggerimenti per lo sviluppo del proprio lavoro sulle teorie a variabili nascoste.

Nel presente capitolo daremo un'introduzione di questa teoria nella sua versione non relativistica. Esporremo inoltre qualche nostra considerazione critica riguardo ad essa.

3.1 L'interpretazione di de Broglie e Bohm

Nel medesimo periodo in cui Born proponeva l'interpretazione probabilistica della funzione d'onda, de Broglie sviluppava quella che in seguito denominò come teoria della doppia soluzione [Jammer 1974].

Nel modello di de Broglie la funzione d'onda ψ non solo è legata ad una densità di probabilità tramite la relazione di Born, ma attraverso un potenziale quantistico, per così dire “pilota” la particella nel suo moto. Secondo il fisico francese il dualismo onda corpuscolo può essere risolto nel modo piú semplice: associando alla particella un'onda reale che durante la sua propagazione la trascina lungo una traiettoria ben definita.

In effetti, per de Broglie, la particella non deve essere pensata distinta dalla sua onda bensì come una singolarità di un campo reale oggettivo u della forma:

$$u = R' e^{iS/\hbar},$$

avente la medesima fase di ψ ma con un'ampiezza R' dotata di una singolarità rappresentante la particella. Le due funzioni u e ψ devono essere soluzioni della medesima equazione di Schrödinger, da qui il nome della sua teoria.

Nel 1927 de Broglie presentò la sua proposta al quinto congresso Solvay nella sola versione dell'onda pilota. Ma in seguito alle aspre critiche ricevute, da parte principalmente di Pauli, e anche alla scoperta delle relazioni di indeterminazione, abbandonò ogni tentativo di descrizione deterministica della teoria quantistica per uniformarsi all'interpretazione di Copenaghen.

Tuttavia nel 1952 Bohm, influenzato dall'incontro con Einstein a Princeton e dalle letture di alcuni scritti di autori russi critici verso l'approccio di Bohr, riscopre, indipendentemente da de Broglie, l'ipotesi dell'onda pilota. Attraverso una serie di articoli sviluppa compiutamente l'idea originale di de Broglie e riformula secondo la sua interpretazione causale i principali risultati della meccanica quantistica non relativistica. In particolare estende la teoria ai sistemi a molti corpi e tratta esaurientemente il problematico processo di misurazione quantistico. Per tale motivo l'interpretazione causale è generalmente attribuita al solo Bohm.

Stimolato dai lavori di Bohm, lo stesso de Broglie dopo 25 anni riprese la sua teoria. I modelli di Bohm e de Broglie, sebbene simili nella trattazione del caso di una singola particella, differiscono fondamentalmente nella descrizione dei sistemi a molti corpi. Come vedremo, nell'interpretazione di Bohm l'equazione di Schrödinger per molte particelle non descrive in generale il comportamento di un insieme di onde in uno spazio tridimensionale, ma l'evoluzione di un'onda in uno spazio astratto a più dimensioni. Il fisico francese considerava non accettabile tale estensione formale, innanzitutto per le proprietà di non località che essa, come vedremo, direttamente implica. Pertanto de Broglie tentò di costruire modelli alternativi che non introducessero tali onde multidimensionali. Ma essi non hanno dato i risultati sperati rivelandosi incompatibili sia con l'equazione di Schrödinger sia con l'evidenza sperimentale.

3.2 Il potenziale quantistico

La teoria di Bohm è costruita estendendo il formalismo della teoria ortodossa al quale viene però associata una diversa interpretazione. In particolare, è assegnato alla funzione d'onda ψ un significato fisico che va oltre l'interpretazione probabilistica usuale e che permette l'introduzione di quegli elementi di realtà necessari a recuperare una descrizione spaziotemporale dei processi individuali.

Forniremo un'introduzione generale della teoria di Bohm iniziando con l'analizzare il semplice sistema costituito da una sola particella, per poi passare al caso più interessante di sistemi a molti corpi [Bohm 1952].

Sia $\psi(\vec{x}, t)$ la funzione d'onda soluzione dell'equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi, \quad (3.1)$$

dove $V = V(\vec{x}, t)$ è l'energia potenziale dovuta ad un campo classico esterno che assumeremo, per semplicità, essere una funzione puramente moltiplicativa, ed m la massa inerziale della particella in considerazione.

Scriviamo la funzione complessa ψ nella forma polare:

$$\psi = R e^{iS/\hbar}. \quad (3.2)$$

Essendo $S = S(\vec{x}, t)$ ed $R = R(\vec{x}, t)$, rispettivamente, la fase e l'ampiezza reale della ψ ; infatti, scrivendo la funzione d'onda come somma della sua parte reale ed immaginaria:

$$\psi = \psi_1 + i\psi_2, \quad (3.3)$$

abbiamo che

$$R = (\psi_1^2 + \psi_2^2)^{1/2} = (\psi^* \psi)^{1/2}, \quad (3.4)$$

e

$$S = \hbar \tan^{-1}(\psi_2/\psi_1). \quad (3.5)$$

Assumeremo per definizione che l'ampiezza R sia non negativa,

$$R(\vec{x}, t) \geq 0 \quad \forall x, t.$$

Inserendo la funzione d'onda nella forma (3.2) nell'equazione di Schrödinger (3.1) e separando la parte reale da quella immaginaria, si verifica immediatamente che i campi $R(\vec{x}, t)$ e $S(\vec{x}, t)$ sono soggetti a due equazioni differenziali accoppiate. Dalla parte reale si ottiene:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} = 0. \quad (3.6)$$

Mentre la parte immaginaria può scriversi:

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{R^2 \nabla S}{m} \right) = 0. \quad (3.7)$$

Nel limite $\hbar \rightarrow 0$ l'interpretazione di queste equazioni è immediata: la (3.6) diviene la ben conosciuta equazione di Hamilton-Jacobi della meccanica classica.

Dato un insieme di traiettorie soluzioni delle equazioni del moto, queste saranno normali a tutte le superfici con S costante e il vettore velocità per una particella passante al tempo t nel punto \vec{x} sarà pari a:

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \frac{\nabla S(\vec{x}, t)}{m}. \quad (3.8)$$

Il campo vettoriale $\nabla S(\vec{x}, t)/m$ definisce in ogni punto dello spazio ed in ogni istante la tangente di una possibile traiettoria passante per quel punto. Con la (3.8), l'equazione (3.7) assume la forma:

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \nabla \cdot (R^2 \vec{v}) = 0. \quad (3.9)$$

Pertanto, se consideriamo $R^2(\vec{x}, t)$ come la densità di probabilità di trovare una delle particelle traccianti il nostro insieme di traiettorie, la (3.9) esprime la legge di conservazione di tale densità di probabilità.

L'idea di de Broglie e di Bohm è di estendere quest'interpretazione anche nel caso $\hbar \neq 0$.

Il moto di una particella viene allora descritto da una equazione di Hamilton-Jacobi generalizzata dove, accanto al potenziale classico V compare un ulteriore fattore Q :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V + Q = 0, \quad (3.10)$$

dove

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R}. \quad (3.11)$$

Il campo $Q = Q(\vec{x}, t)$ è chiamato potenziale quantistico e assume nella teoria un ruolo chiave.

Il termine $\nabla S/m$ è ancora considerato come la velocità della particella, a cui in ogni istante, contrariamente all'interpretazione ordinaria, viene assegnato un valore precisamente definito dell'impulso e della posizione. L'equazione (3.10) tuttavia, implica che la particella non si muove soltanto sotto l'azione di una forza interamente derivabile da un potenziale di tipo classico, ma è soggetta anche ad una forza "quantomeccanica" derivabile dal potenziale quantistico Q (3.11).

Le traiettorie della particella, sempre ortogonali alle superfici $S = \text{costante}$, sono calcolate integrando le equazioni differenziali:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = (1/m) \nabla S(\vec{x}, t) \Big|_{\vec{x}=\vec{x}(t)}, \quad (3.12)$$

previa assegnazione della posizione iniziale $\vec{x}_0 = \vec{x}(0)$, mentre la velocità al tempo zero è determinata dal campo iniziale $\psi_0(\vec{x}) = \psi(\vec{x}, 0)$ tramite la relazione:

$$\vec{p}_0(\vec{x}) = \nabla S_0(\vec{x}), \quad (3.13)$$

perciò, specificando la posizione \vec{x} e il campo ψ ad un certo istante, lo stato del sistema individuale è conosciuto per tutti i tempi; per tale ragione de Broglie ha chiamato la (3.12) formula della guida e la ψ onda pilota.

In meccanica quantistica la densità di corrente di probabilità \vec{j} è definita tramite la relazione:

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi}(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \quad (3.14)$$

ma con le (3.2) e (3.8) si mostra facilmente che:

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = R^2 \vec{v}, \quad (3.15)$$

dunque \vec{j} è proporzionale al campo di velocità $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t)$ e le linee di corrente sono in ogni punto tangenti alle traiettorie $\vec{x} = \vec{x}(t)$ delle particelle.

I campi R ed S possono essere ottenuti risolvendo le equazioni differenziali accoppiate (3.6) e (3.7), ma in realtà è molto più semplice ricavare la ψ dall'equazione di Schrödinger, essendo questa lineare e poi applicare le equazioni (3.3), (3.4) e (3.5). Ovviamente per ottenere una soluzione unica della (3.1) dobbiamo assegnare la funzione d'onda all'istante iniziale ψ_0 e automaticamente, ciò specificherà anche i valori dei campi iniziali R ed S:

$$R_0(\vec{x}) = R(\vec{x}, 0), \quad S_0(\vec{x}) = S(\vec{x}, 0).$$

A parte rispettivamente, per delle costanti moltiplicative e additive che saranno influenti per le equazioni del moto. Infatti, un'interessante proprietà del potenziale quantistico è quella di rimanere invariato se l'ampiezza reale R viene moltiplicata per un fattore di scala costante:

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 aR}{aR} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R}.$$

Il fatto che la particella sia più sensibile alla forma dell'onda che alla sua intensità è responsabile di un'importante caratteristica: l'effetto del potenziale quantistico può non annullarsi nelle regioni dove $\psi \rightarrow 0$.

L'utilizzo in meccanica classica delle equazioni di Hamilton-Jacobi nella ricerca delle equazioni del moto è un fatto di pura convenienza matematica: in linea di principio potremmo sempre utilizzare le leggi di Newton. Allora, così come abbiamo introdotto in meccanica quantistica un'equazione di Hamilton-Jacobi generalizzata, possiamo introdurre una seconda legge di Newton quantistica:

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\nabla \left[V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} \right]. \quad (3.16)$$

Citiamo il commento di Bohm:

Poichè la forza che agisce su di una particella ora dipende da una funzione del valore assoluto $R(\vec{x})$ della funzione d'onda $\psi(\vec{x})$, valutata nell'attuale posizione della particella, siamo effettivamente portati a considerare la forma d'onda di un elettrone individuale come una rappresentazione matematica di un campo oggettivamente reale. Questo campo esercita una forza su di una particella in un modo analogo, ma non identico, al modo in cui un campo elettromagnetico esercita una forza su di una carica [Bohm 1952].

Ma i potenziali V e Q non sono tra loro indipendenti, infatti il potenziale classico entra nell'equazione di Schrödinger che determina la forma di Q . Potremmo dire che nelle leggi del moto:

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\nabla(V + Q),$$

il potenziale V ha due effetti, uno puramente classico attraverso la forza $-\nabla V$ ed un altro puramente quantistico, mediante il fattore ∇Q . È allora importante notare che, sebbene V possa essere limitato, il potenziale quantistico può trasportarne gli effetti anche in regioni dove esso è nullo. Mentre classicamente in tali regioni sarebbero possibili solo moti rettilinei uniformi, in meccanica quantistica, per via della presenza del potenziale quantistico, è possibile tutta una varietà di moti dipendenti dalla forma della funzione d'onda.

Vedremo in seguito come la dipendenza di Q da V permetta di descrivere naturalmente certi fenomeni tipici della teoria dei quanti come l'effetto tunnel in regioni classicamente proibite, l'esistenza di stati stazionari e gli effetti d'interferenza.

A questo punto per Bohm diventa naturale definire come energia di una particella quantistica:

$$E = -\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R}, \quad (3.17)$$

nella quale, accanto al potenziale classico, compare ora anche il potenziale quantistico Q .

Prima di passare a qualche esempio di applicazione della teoria, riassumiamo brevemente le assunzioni su cui si basa l'interpretazione di Bohm:

- (1) Un sistema fisico individuale è descritto da un campo che si propaga nello spazio e nel tempo e da una struttura puntiforme che si muove sotto la guida del campo.
- (2) Il campo è matematicamente descritto dalla funzione d'onda $\psi(\vec{x}, t)$, soluzione dell'equazione di Schrödinger.
- (3) Il moto della particella è ottenuto dalla soluzione delle equazioni differenziali:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = (1/m) \nabla S(\vec{x}, t) \Big|_{\vec{x}=\vec{x}(t)}.$$

dove S è la fase di ψ . Per risolvere tale equazione dobbiamo assegnare la condizione iniziale $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$. Questa specificazione costituisce la sola informazione ulteriore introdotta dalla teoria che non è contenuta nella $\psi(\vec{x}, t)$, essendo la velocità iniziale fissata, una volta che noi conosciamo S . Un insieme di possibili moti associati con il medesimo campo è generato variando \vec{x}_0 .

- (4) La probabilità che una particella nell'insieme cada tra i punti \vec{x} e $\vec{x} + d\vec{x}$ al tempo t è data da

$$R^2(\vec{x}, t)d^3x,$$

dove $R^2 = |\psi|^2$. L'uso della statistica, tuttavia, non è una caratteristica intrinseca alla struttura concettuale della teoria, ma semplicemente una conseguenza della nostra ignoranza delle precise condizioni iniziali della particella. L'introduzione di un insieme statistico è, come nella meccanica statistica classica, solo una necessità pratica.

La penetrazione in una barriera di potenziale

Secondo la fisica classica, una particella non può mai penetrare una barriera di potenziale V se la sua energia cinetica è più bassa dell'altezza della barriera. In teoria quantistica sappiamo però che anche in tal caso la particella ha una probabilità diversa da zero di superare un gradino di potenziale. Accenniamo a come questo misterioso fenomeno, che sembra contraddire il principio di conservazione dell'energia, possa essere spiegato nell'interpretazione di Bohm.

Consideriamo un pacchetto d'onde incidente su una barriera di potenziale. Durante l'interazione tra il pacchetto e la barriera, il potenziale quantomeccanico Q subisce rapide e violente fluttuazioni sia spazialmente che nel tempo. Anche la traiettoria della particella può divenire molto complicata.

Ma occasionalmente Q diverrà negativo, cancellando in parte la barriera di potenziale, e permetterà il passaggio della particella. La possibilità di passare dipenderà quindi dalla somma totale $V+Q$ e non dal solo potenziale classico V . Inoltre sarà importante anche la localizzazione iniziale della particella, infatti questa penetrerà la barriera solo se potrà trovarsi in essa nell'intervallo di tempo in cui la sua energia cinetica è maggiore del potenziale totale $V+Q$.

Rimandiamo all'articolo di Dewdney e Hiley [1982] per un dettagliato esame numerico dello scattering di pacchetti d'onde gaussiani sulle barriere di potenziale con grafici delle traiettorie delle particelle associate per differenti condizioni iniziali.

L'esperimento della doppia fenditura

La trattazione dell'esperimento della doppia fenditura è un esempio particolarmente esplicativo delle caratteristiche del modello di Bohm. Philippidis, Dewdney e Hiley [1979] hanno mostrato con calcoli analitici e modelli numerici come sia possibile comprendere il fenomeno dell'interferenza senza la necessità di abbandonare il concetto di traiettoria.

Ogni singola particella viene portata dall'onda ad essa associata a seguire una ben definita traiettoria. Le forze generate dal potenziale quantistico costringono le particelle ad assumere sullo schermo la caratteristica densità di probabilità della figura d'interferenza. Inoltre, se la distribuzione iniziale delle particelle soddisfa il postulato quantistico $\rho = |\psi(x, t_0)|^2$, il potenziale quantistico assicura che tale relazione rimanga valida anche per tutti i tempi successivi.

Figura 3.1 Le traiettorie delle particelle per l'esperimento della doppia fenditura calcolate secondo il modello di Bohm.

Nella figura 3.1 sono riprodotte le traiettorie delle particelle calcolate da Philipidis, Dewdney e Hiley. Facciamo notare come nessuna traiettoria incroci il piano di simmetria della figura: dunque tutte le particelle sulla metà superiore del secondo schermo devono arrivare dalla fenditura in alto, così come tutte le particelle osservate nella metà inferiore devono arrivare dalla fenditura in basso.

L'osservazione della posizione finale della particella ci permette quindi di dedurre attraverso quale fenditura la particella è realmente passata.

Mostriamo come, con un semplice ragionamento euristico, sia possibile scoprire, secondo il modello di Bohm, da quale fenditura sia passata la particella.

Supponiamo che qualche particella passi da A ed arrivi nella regione inferiore dello schermo, che indicheremo con B_s, (figura 3.2). Poiché la figura d'interferenza è simmetrica rispetto al piano di simmetria passante per le fenditure, sullo schermo nelle regioni A_s e B_s vi è distribuito un ugual numero di particelle. Ciò significa che qualche altra particella dell'insieme deve andare dalla fenditura B alla regione A_s. Perciò devono esistere traiettorie che si intersecano.

Ma questo è impossibile nel modello di Bohm, infatti in un punto dello spazio delle configurazioni, in un certo istante, può passare una e una sola traiettoria: poiché la funzione d'onda $\psi(x, t)$ è a singolo valore rispetto alla posizione, anche la

Figura 3.2 Essendo la funzione d'onda $\psi(x)$ a singolo valore, le traiettorie non possono incrociarsi né intersecare il piano di simmetria P .

velocità $v = \nabla S/m$ tangente alla traiettoria in ogni punto deve essere unica; se più traiettorie si intersecassero in un certo punto, per quel punto dovremmo associare più valori alla velocità.

Dunque, per ragioni di simmetria, e per l'unicità dei valori della funzione d'onda in ogni punto spaziotemporale, le traiettorie non possono superare il piano P. Perciò le particelle che attraversano la fenditura in A (B) devono cadere nella zona As (Bs).

Tuttavia, dobbiamo far notare come la teoria di Bohm ha solo virtualmente una maggiore capacità predittiva rispetto alla teoria ortodossa, infatti la correttezza delle sue previsioni non è in alcun modo verificabile.

In particolare non potremmo mai scoprire se veramente una particella è passata dalla fenditura prevista dalla teoria di Bohm senza distruggere la figura d'interferenza.

3.3 I sistemi a molti corpi

L'estensione della teoria di de Broglie-Bohm a sistemi con molte particelle avviene in modo diretto, ma nella generalizzazione appaiono nuove interessanti proprietà fisiche, non evidenti quando si prende in considerazione un solo oggetto.

Ora il nostro sistema sarà descritto da una funzione d'onda:

$$\psi = \psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, t), \quad (3.27)$$

definita nello spazio delle configurazioni $3n$ dimensionale, dove le $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ sono coordinate cartesiane ortogonali di un insieme di n particelle puntiformi con traiettorie:

$$\vec{x}_i = \vec{x}_i(t) \quad \text{con} \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.28)$$

nello spazio euclideo tridimensionale; nello spazio delle configurazioni avremo una singola traiettoria, equivalente alle n traiettorie dello spazio euclideo. Dunque, mentre le particelle si muovono nello spazio tridimensionale, il campo guida ψ è definito in uno spazio a $3n$ dimensioni. La funzione d'onda ψ è soluzione dell'equazione di Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\sum_{i=1}^n \left(-\frac{\hbar^2}{2m_i} \right) \nabla_i^2 + V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, t) \right] \psi, \quad (3.29)$$

dove con m_i si è indicata la massa della particella i -esima, mentre V indica l'energia potenziale classica d'interazione tra le particelle, includente un eventuale potenziale esterno. Naturalmente, la soluzione dell'equazione (3.29) sarà univocamente determinata fissando il valore della funzione d'onda al tempo $t = 0$: $\psi_0(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, 0)$.

L'equazione di Schrödinger (3.29), utilizzando la ψ nella forma polare:

$$\psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, t) = R(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, t) e^{iS(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, t)/\hbar}, \quad (3.30)$$

può scriversi, come svolto precedentemente per una singola particella, come due equazioni differenziali accoppiate in termini dei due campi reali $R(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, t)$ e $S(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, t)$:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{(\nabla_i S)^2}{2m_i} + Q + V = 0, \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \nabla_i \cdot \left(\frac{R^2 \nabla_i S}{m_i} \right) = 0, \quad (3.32)$$

dove con Q indichiamo l'energia potenziale quantistica per il sistema a molte particelle:

$$Q = - \sum_{i=1}^n \frac{\hbar^2}{2m_i} \frac{\nabla_i^2 R}{R}. \quad (3.33)$$

In fisica classica, specificate le caratteristiche delle particelle in considerazione, il potenziale V risulta essere una funzione preassegnata di queste caratteristiche e delle coordinate delle particelle, ma in meccanica quantistica è presente anche il potenziale quantistico Q dipendente dallo stato ψ : Q sarà diverso per diverse scelte dello stato ψ , sebbene le soluzioni ψ dipenderanno dalle caratteristiche del sistema.

La (3.31) è nuovamente interpretata come un'equazione di Hamilton-Jacobi generalizzata. Le traiettorie delle particelle sono allora le soluzioni $\vec{x}_i = \vec{x}_i(t)$ del sistema di equazioni differenziali :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}_i}{dt} &= \vec{v}_i(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, t) \\ &= (1/m_i) \nabla_i S(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, t) \Big|_{\vec{x}_j = \vec{x}_j(t)}, \quad i, j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.34)$$

univocamente determinate una volta assegnate le posizioni iniziali $\vec{x}_{0i} = \vec{x}_i(0)$ di tutte le particelle e lo stato ψ del sistema.

Naturalmente possiamo introdurre anche una seconda legge di Newton generalizzata:

$$m_i \frac{d^2 \vec{x}_i}{dt^2} = -\nabla_i [Q + V] \Big|_{\vec{x}_j = \vec{x}_j(t)}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (3.35)$$

Dall'equazione di Hamilton-Jacobi, l'energia totale del sistema risulta definita come:

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\partial S}{\partial t} \Big|_{\vec{x}_j = \vec{x}_j(t)} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 + Q(\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t), t) + V(\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t), t). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Come nel caso di singola particella, affinché le predizioni statistiche della teoria di Bohm siano le medesime della meccanica quantistica ordinaria è necessario assumere il seguente postulato:

La probabilità che al tempo $t=0$ la particella 1 si trovi nell'elemento di volume d^3x_1 attorno al punto \vec{x}_1 , che la particella 2 si trovi nell'elemento di volume d^3x_2 attorno al punto \vec{x}_2 , e così via, è pari a:

$$R^2(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, 0) d^3x_1 \cdots d^3x_n.$$

Se questa condizione è vera al tempo $t=0$, la legge di conservazione (3.32) ci assicura che sarà vera per tutti i tempi.

3.4 La non località nella teoria di Bohm

Senza dubbio la caratteristica più straordinaria dei sistemi a molti corpi, sottolineata dallo stesso Bohm, è la proprietà di non località: la dipendenza istantanea di

ogni traiettoria dalla posizione di tutte le altre particelle, il sistema risponde globalmente ed istantaneamente ad una perturbazione localizzata nello spazio, anche se le particelle sono tra loro separate da grandi distanze.

Consideriamo per esempio la seguente formula della guida per una particella:

$$\frac{d\vec{x}_i}{dt} = (1/m_i)\nabla_i S(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, t) \Big|_{\vec{x}_j = \vec{x}_j(t)}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.37)$$

Per via della forma della fase S il moto della particella i -esima in generale dipenderà in tempo reale dalle coordinate di tutte le particelle: disturbando il sistema in una certa regione dello spazio, tutto il campo S reagirà in modo istantaneo a questo disturbo e di conseguenza, poiché è il campo a guidare il moto delle particelle, saranno istantaneamente modificati tutti i moti.

Ricordiamo poi che il potenziale Q non dipende tanto dal valore assoluto di ψ ma dalla sua forma: così, anche se $\psi \simeq 0$ in una certa regione, non è detto che in quel luogo il potenziale quantistico non abbia effetti rilevanti sul moto.

Inoltre, classicamente, all'aumentare della distanza di separazione tra le particelle, le forze tendono ad annullarsi e queste possono considerarsi indipendenti, ma in meccanica quantistica, per via della presenza di Q , il moto di una particella potrà ancora dipendere dalla presenza delle altre particelle, anche se $V = 0$:

$$m_i \frac{d^2 \vec{x}_i}{dt^2} = -\nabla_i [Q(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, t)] \Big|_{\vec{x}_j = \vec{x}_j(t)}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.38)$$

Tra poco vedremo come la non località sia una caratteristica fondamentale dei sistemi in stati non fattorizzabili.

Studiamo sotto quali condizioni i moti delle particelle sono non localmente correlati oppure indipendenti. Per semplicità ci limiteremo a considerare un sistema costituito da due sole particelle, l'estensione al caso generale con più corpi sarà immediata.

Supponiamo che il sistema in studio sia descritto da uno stato la cui funzione d'onda possa scriversi come il prodotto di due funzioni d'onda ciascuna dipendente dalle proprietà di una singola particella:

$$\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2; t) = \psi_A(\vec{x}_1, t)\psi_B(\vec{x}_2, t). \quad (3.39)$$

Dalla teoria quantistica ordinaria sappiamo che una funzione d'onda fattorizzabile del tipo (3.39) descrive una coppia di particelle fisicamente indipendenti, ciascuna soddisfacente una propria equazione di Schrödinger. Vediamo cosa accade nella teoria di Bohm; è immediato verificare ponendo in forma polare la ψ , la ψ_A e la ψ_B che per la fase $S(\vec{x}_1, \vec{x}_2; t)$ e l'ampiezza $R(\vec{x}_1, \vec{x}_2; t)$ valgono rispettivamente le equazioni:

$$S(\vec{x}_1, \vec{x}_2; t) = S_A(\vec{x}_1; t) + S_B(\vec{x}_2; t), \quad (3.40)$$

$$R(\vec{x}_1, \vec{x}_2; t) = R_A(\vec{x}_1; t) \cdot R_B(\vec{x}_2; t). \quad (3.41)$$

Ma allora, per la (3.41) anche il potenziale quantistico $Q(\vec{x}_1, \vec{x}_2; t)$ sarà somma di due funzioni tra loro indipendenti:

$$Q(\vec{x}_1, \vec{x}_2; t) = Q_A(\vec{x}_1; t) + Q_B(\vec{x}_2; t), \quad (3.42)$$

con

$$Q_A = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla_1^2 R_A}{R_A} \quad \text{e} \quad Q_B = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla_2^2 R_B}{R_B}. \quad (3.43)$$

Mentre, dalla (3.40), per le equazioni del moto delle due particelle otteniamo:

$$\frac{d\vec{x}_1}{dt} = (1/m_1) \nabla_1 S_A(\vec{x}_1, t) \Big|_{\vec{x}_1=\vec{x}_1(t)}, \quad (3.44)$$

e

$$\frac{d\vec{x}_2}{dt} = (1/m_2) \nabla_2 S_B(\vec{x}_2, t) \Big|_{\vec{x}_2=\vec{x}_2(t)}. \quad (3.45)$$

I moti saranno quindi non correlati: la traiettoria di una particella non dipenderà dalla presenza o meno dell'altra e ogni particella soddisferà una separata equazione di Hamilton-Jacobi.

L'energia totale del sistema pertanto sarà la somma delle energie di ogni singola particella: $E = E_A + E_B$, con

$$E_A = -\frac{\partial S_A}{\partial t} = +\frac{(\nabla_1 S_A)^2}{2m} + V_A + Q_A, \quad (3.46)$$

$$E_B = -\frac{\partial S_B}{\partial t} = +\frac{(\nabla_2 S_B)^2}{2m} + V_B + Q_B. \quad (3.47)$$

In generale però non sarà possibile esprimere la funzione d'onda $\psi = \psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2; t)$ nella forma fattorizzata (3.39), e quindi la fase $S(\vec{x}_1, \vec{x}_2; t)$ e l'ampiezza $R(\vec{x}_1, \vec{x}_2; t)$ come nelle (3.40) e (3.41). Allora i moti di ciascuna particella dipenderanno inestricabilmente dalla posizione dell'altra. Ad esempio, per la particella 1 la (3.44) diviene:

$$\frac{d\vec{x}_1}{dt} = (1/m_1) \nabla_1 S(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t) \Big|_{\vec{x}_j=\vec{x}_j(t)}, \quad j = 1, 2.$$

Figura 3.3 a) Una particella è diretta contro un divisore di fascio. Il sistema si sviluppa quindi in uno stato di sovrapposizione di due onde: un'onda contenente la particella diretta lungo il cammino a e un'onda vuota della particella diretta verso l'altra direzione b . Nel modello di Bohm l'onda vuota è altrettanto reale di quella che contiene la particella. b) Un'onda vuota si comporta in un campo magnetico come se possedesse tutta la carica e la massa della particella.

In definitiva, possiamo affermare che, nella teoria di Bohm, condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema possieda proprietà non localmente correlate è che esso sia in uno stato non fattorizzabile. Viceversa, la fattorizzabilità implica l'indipendenza fisica dei costituenti del sistema.

Nel limite classico gli effetti del potenziale quantistico divengono trascurabili e l'usuale nozione di separabilità e località degli oggetti macroscopici viene ritrovata come approssimazione.

3.5 Il fantasma del gatto di Schrödinger

Presentiamo qui una nostra critica alla teoria di Bohm. Dobbiamo però premettere che essa non è diretta contro la coerenza logica della sua interpretazione quanto contro certe sue caratteristiche che la rendono poco plausibile o per lo meno stravagante. In particolare, il modello non risolverebbe pienamente il paradosso del gatto di Schrödinger.

L'assunzione fondamentale di Bohm è l'esistenza oggettiva di un'onda associata alle particelle. Consideriamo lo schema nella figura 3.3a. Una particella incide su un divisore di fascio e il pacchetto d'onde iniziale ad esso associato evolve linearmente nella sovrapposizione di due funzioni d'onda dirette rispettivamente lungo a e b .

La particella segue soltanto uno dei due cammini, mentre la sua onda si scinde in due parti separate. Secondo il modello di Bohm, l'onda che non contiene la particella è altrettanto reale dell'onda che la possiede. Cioè le onde vuote devono essere considerate oggetti fisici.

Riprendiamo ora il paradosso del gatto di Schrödinger incontrato nel capitolo precedente. Nel dispositivo immaginato da Schrödinger, un gatto veniva posto in uno stato di sovrapposizione macroscopica in cui esso era contemporaneamente vivo e morto:

$$|\Psi(t)\rangle = a(t)|\psi_a\rangle|G_I\rangle|\text{Gatto morto}\rangle + b(t)|\psi_b\rangle|G_o\rangle|\text{Gatto vivo}\rangle.$$

Secondo Bohm, il sistema materiale si troverà certamente in modo definito in uno solo dei due stati. Tuttavia, ora allo stato vuoto viene assegnata una effettiva realtà oggettiva.

Supponiamo che il gatto sia morto, allora la funzione d'onda vuota corrisponderà comunque a un gatto che in un certo senso continua la propria esistenza in una forma diversa da quella materiale (figura 3.4).

Pertanto accanto al mondo materiale deve esistere un mondo fatto di onde vuote in ogni caso reale, nel quale il fantasma del gatto di Schrödinger continua a vivere separatamente dal proprio corpo!

Il processo della misurazione e il problema dell'oggettificazione nel modello di Bohm è quindi risolto solo a patto di accettare queste situazioni paradossali.

La teoria di Bohm così espressa ricorda la teoria dei multimondi di Everett [DeWitt 1970]. Anche per quest'ultima non vi è il collasso dello stato, ma esistono una miriade di universi paralleli, tutti ugualmente reali e tra loro non interagenti, nei quali ogni processo di osservazione causa una nuova ramificazione di universi, ciascuno con un proprio osservatore associato al corrispondente stato del dispositivo di misura. Ad esempio, per quanto riguarda il paradosso di Schrödinger, vi saranno degli universi in cui il gatto è vivo e altri in cui il gatto è morto.

Tuttavia la teoria dei multimondi soffre di una grave incongruenza logica: essa non specifica sotto quali condizioni avviene la creazione di nuovi universi. Everett fa intervenire l'irreversibilità del processo di misurazione, ma la meccanica quantistica è una teoria reversibile. Se essa contenesse già l'irreversibilità nel processo di misurazione non avremmo certo bisogno della teoria dei multimondi!

A differenza della teoria dei multimondi, nel modello di Bohm le onde vuote associate agli stati di sovrapposizione coesistono assieme agli oggetti materiali in un unico universo.

Un'altra stranezza dell'onda pilota è che il pacchetto di onde vuoto della particella si comporta esattamente come il pacchetto d'onde che la contiene. Ad esempio, un pacchetto d'onde vuoto, parte dello stato di sovrapposizione associato ad un elettrone, si muove in un campo magnetico come se possedesse tutta la carica e la massa della particella (figura 3.3b). Analogamente, la cinematica di un'onda vuota risente degli effetti del campo gravitazionale, pur essendo vuota di energia.

Difficoltà ulteriori subentrano nel passaggio a sistemi fisici composti da più di una particella. Per essi la funzione d'onda evolve non nello spazio ordinario tridimensionale, ma nello spazio multidimensionale delle configurazioni. E dunque, anche le onde vuote, come oggetti fisici, devono operare in tale spazio.

Figura 3.4 Per la teoria di Bohm, nella quale è assente il postulato del collasso, accanto al mondo materiale deve esistere un mondo fatto di onde vuote altrettanto reale del primo. In esso il fantasma del gatto di Schrödinger, corrispondente ad un'onda vuota, continua a condurre un'esistenza separata e indipendente dal proprio corpo privo di vita.

Acceniamo infine solo al fatto che l'estensione relativistica della teoria di Bohm va incontro a gravi problemi, sia di livello tecnico che di principio. In particolare è dubbio se sia possibile introdurre anche nel dominio della relatività quantistica il concetto di traiettoria. Ciò è in parte legato alla difficoltà di definire in modo generale densità di probabilità non negative.

Ma l'ostacolo fondamentale è dovuto al carattere intrinsecamente non locale delle correlazioni quantistiche. Si dimostra inoltre che le traiettorie delle particelle di Bohm non rappresentano elementi di realtà Lorentz-invarianti, cioè diversi osservatori inerziali possono associare alla medesima particella traiettorie completamente diverse.

Per i dettagli sui vari tentativi di generalizzazione relativistica del modello di Bohm rimandiamo alla letteratura [Bohm, Hiley 1993] [Holland 1993].

Capitolo 4

Le disuguaglianze di Bell

La scoperta piú profonda di tutta la scienza.
H. Stapp

Il teorema di Bell rappresenta certamente uno dei piú grandi contributi al chiarimento dei problemi concettuali della teoria quantistica. Bell è stato in grado di dedurre una disuguaglianza per le correlazioni di osservabili che ogni tipo di modello a variabili nascoste locale deve soddisfare ma che è violata dalla teoria quantistica.

Presenteremo la versione originale del teorema di Bell per teorie a variabili nascoste deterministiche, una sua versione alternativa ideata da Wigner e le generalizzazioni che sono seguite ad essa per rendere le conseguenze del teorema sperimentalmente controllabili.

Infine riporteremo una breve rassegna dei primi esperimenti realizzati dedicati alla verifica delle disuguaglianze di Bell.

4.1 Il teorema di Bell

Einstein, Podolsky e Rosen concludevano il loro importante lavoro del 1935 affermando l'incompletezza della teoria quantistica e auspicandone il suo superamento per mezzo di un'opportuna teoria capace di reintrodurre in fisica quei concetti di causalità e località cari ad Einstein. Per essi non vi era alcuna valida ragione di dubitare che ogni risultato raggiunto della meccanica quantistica non potesse essere duplicato da un modello a parametri nascosti sufficientemente sofisticato.

Ma a parte poche eccezioni, tali suggerimenti furono ignorati dalla comunità dei fisici. Una tagliente espressione di Pauli esprime efficacemente l'atmosfera intellettuale circolante attorno alle opinioni di Einstein:

Come di recente sosteneva O. Stern, l'eventuale esistenza di qualcosa di cui non possiamo sapere nulla non dovrebbe preoccuparci piú di quanto non ci preoccupi

l'antico problema di quanti angeli possano trovare posto sopra la punta di uno spillo. Mi sembra però che in ultima analisi tutte le questioni poste da Einstein siano di questo tipo (citato in [Boniolo 1997 p. 442]).

Al fisico irlandese John S. Bell va il grande merito di aver scoperto una formulazione matematica della posizione epistemologica di EPR e di averne mostrata l'incompatibilità con le predizioni statistiche della meccanica quantistica. Contro ogni aspettativa, Bell è riuscito a trasformare un quesito che appariva puramente metafisico ed epistemologico in un problema di fisica, suscettibile di una soluzione nel campo dell'esperienza.

Le conclusioni raggiunte da Bell sono di estrema generalità, non importa la forma e il livello di complessità del modello a variabili nascoste escogitato: nessuna teoria soddisfacente i criteri di realismo e località desiderati da Einstein sarà mai capace di replicare tutti i risultati della meccanica quantistica.

Durante il suo studio dei modelli a variabili nascoste e dei teoremi che ne tentavano di dimostrare l'impossibilità, l'attenzione di Bell era stata attratta dal carattere intrinsecamente non locale della teoria di Bohm: come abbiamo visto nel precedente capitolo, in essa la traiettoria di una particella localizzata in una regione dello spazio può dipendere istantaneamente da quel che accade in un luogo a lei arbitrariamente lontano. Bell si chiese allora se la non località che appariva nella trattazione causale di Bohm del paradosso EPR fosse non un difetto del modello teorico, ancora parziale essendo non relativistico, ma una caratteristica necessaria che ogni teoria a variabili nascoste in grado di riprodurre perfettamente il formalismo quantistico deve contenere. Questa geniale intuizione portò Bell ad elaborare il famoso teorema di impossibilità delle teorie a variabili nascoste locali.

Nella sua dimostrazione egli mosse dalla versione del paradosso EPR formulata da Bohm. Riprendiamo brevemente l'argomentazione di quest'autore. Consideriamo una coppia di particelle di spin $1/2$ nello stato di singoletto che si muovono liberamente in direzioni opposte. Due apparati di Stern-Gerlach sono disposti in modo da misurare le componenti dello spin delle particelle 1 e 2 lungo due direzioni dello spazio. Sia \vec{a} un vettore unitario indicante una direzione qualunque, se la misura della componente dello spin $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a}$, dà il valore $+1$, allora, secondo la meccanica quantistica, una misura della componente parallela $\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{a}$ darà il valore -1 , e viceversa.

Introduciamo ora l'essenziale ipotesi di località: se le due misure corrispondono ad eventi spazialmente separati, l'orientazione di un magnete di Stern-Gerlach non influenza il risultato della misurazione eseguita dall'altro apparato.

Poiché possiamo predire con certezza il risultato di una qualunque delle componenti dello spin della particella 2 da una misura della stessa componente della particella 1, secondo EPR segue che il valore di ogni misura deve essere già fissato prima dell'osservazione.

Ma la funzione d'onda quantomeccanica non determina il risultato di un'osservazione individuale, mentre la predeterminazione implica la possibilità di una più completa specificazione dello stato, e ciò è contrario al criterio di completezza di una teoria fisica come enunciato da EPR.

Andiamo ora a descrivere l'originale contributo di Bell [1964]. La descrizione completa dello stato, determinante il valore di una singola misura, sia ottenuta per mezzo di un insieme di parametri nascosti λ . Poichè il risultato conseguito dal teorema è indipendente dal fatto che λ denoti una singola variabile, un insieme di variabili, oppure se le variabili nascoste siano discrete o continue, seguendo Bell supponiamo per semplicità che λ denoti un singolo parametro continuo.

Per le ipotesi di determinismo e di località, il risultato A di una misura della componente $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a}$ è determinato soltanto dall'orientamento \vec{a} e dalla variabile nascosta λ , così come il risultato B della misura di $\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b}$ dipende a sua volta solo da \vec{b} e da λ . Le ipotesi della proprietà di località e del determinismo possono allora esprimersi formalmente con le condizioni:

$$A = A(\vec{a}, \lambda), \quad B = B(\vec{b}, \lambda). \quad (4.1)$$

Alle variabili dicotomiche A e B associamo per semplicità i valori ± 1 , $+1$ per lo spin su e -1 per lo spin giù:

$$A(\vec{a}, \lambda) = \pm 1, \quad B(\vec{b}, \lambda) = \pm 1. \quad (4.2)$$

Sia $\rho(\lambda)$ la distribuzione di probabilità delle variabili λ normalizzata ad uno su tutto il dominio Λ dei parametri nascosti:

$$\int_{\Lambda} \rho(\lambda) d\lambda = 1. \quad (4.3)$$

Il valore di aspettazione del prodotto delle componenti $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a}$ e $\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b}$, cioè la funzione di correlazione, in termini del modello a variabili nascoste si scrive allora:

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda). \quad (4.4)$$

Richiederemo che la (4.4) sia pari alla correlazione quantistica calcolata sullo stato di singoletto ψ_S :

$$\langle (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a}) \otimes (\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b}) \rangle_{\psi_S} = -\vec{a} \cdot \vec{b}. \quad (4.5)$$

Il teorema di Bell dimostrerà che ciò è impossibile: nessuna teoria causale e locale a variabili nascoste potrà mai riprodurre le correlazioni quantistiche calcolate sullo stato di singoletto.

La proprietà di perfetta anticorrelazione, $E(\vec{a}, \vec{a}) = -1$, per le (4.2), vale se, e solo se:

$$A(\vec{a}, \lambda) = -B(\vec{a}, \lambda), \quad (4.6)$$

salvo per un insieme di punti λ di probabilità zero. Riscriviamo dunque la correlazione nella forma:

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = - \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda). \quad (4.7)$$

Se \vec{c} è un'altra orientazione possibile, valgono le uguaglianze:

$$\begin{aligned} E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{c}) &= - \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) [A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) - A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \\ &= \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) [A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda) - 1], \end{aligned}$$

dalle relazioni (4.2) segue quindi che

$$|E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{c})| \leq \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)]. \quad (4.8)$$

E finalmente, per la condizione di normalizzazione (4.3), e poiché il secondo termine nel membro di destra della (4.8) non è che la funzione di correlazione $E(\vec{b}, \vec{c})$, ricaviamo la disuguaglianza:

$$|E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{c})| \leq 1 + E(\vec{b}, \vec{c}). \quad (4.9)$$

La (4.9) è la prima di una serie di importanti relazioni generalmente chiamate col nome di disuguaglianze di Bell.

Dunque in qualunque teoria a variabili nascoste, locale e deterministica, i coefficienti delle correlazioni devono necessariamente soddisfare la disuguaglianza di Bell. Ma tale disuguaglianza non è compatibile con le predizioni statistiche della meccanica quantistica.

Poniamo infatti nella (4.9) le correlazioni quantistiche calcolate per lo stato di singoletto $E_{\psi_S}(\vec{a}, \vec{b}) = -\vec{a} \cdot \vec{b}$:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}| \leq 1 - \vec{b} \cdot \vec{c}. \quad (4.10)$$

Scegliamo i tre vettori \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} complanari, in modo che \vec{a} sia perpendicolare a \vec{b} e \vec{c} cada tra \vec{a} e \vec{b} formando un angolo θ con \vec{a} :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = \sin \theta, \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = \cos \theta. \quad (4.11)$$

Dalle (4.10) e (4.11) segue quindi la disuguaglianza:

$$\sin \theta + \cos \theta \leq 1 \quad \text{con } \theta \in [0, \pi/2]. \quad (4.12)$$

Ma la funzione di θ del lato sinistro ha un massimo per $\theta_M = \pi/4$, dove prende il valore $\sqrt{2}$. Dunque, almeno per un intorno di $\theta_M = \pi/4$, le correlazioni quantistiche non soddisfano la disuguaglianza di Bell. Possiamo quindi enunciare il seguente:

Teorema di Bell: Nessuna teoria deterministica locale a variabili nascoste può riprodurre tutte le predizioni della meccanica quantistica.

La dimostrazione di Bell deve la sua fondamentale importanza alla sua estrema generalità: qualsiasi formalismo atto a reintrodurre il determinismo ed il realismo nella teoria dei quanti deve introdurre in essa anche qualche forma di non località, indipendentemente dai dettagli del modello. Citiamo le conclusioni dello stesso Bell:

In una teoria in cui sono aggiunti dei parametri alla meccanica quantistica in modo da determinare i risultati di misure individuali, senza modificarne le predizioni statistiche, deve esistere un meccanismo per cui la predisposizione di un apparato di misura possa influenzare la misura eseguita da un altro strumento, per quanto remoto. Inoltre, il segnale coinvolto deve propagarsi istantaneamente, una tale teoria non sarebbe dunque Lorentz invariante¹[Bell 1964].

4.2 La versione di Wigner della disuguaglianza di Bell

In letteratura esistono molte derivazioni alternative del teorema di Bell, una delle più semplici ed eleganti è dovuta a Wigner [1970]. Ne riporteremo qui la dimostrazione perchè essa chiarisce perfettamente come le ipotesi di realismo e località di Einstein agiscono nella dimostrazione del teorema. Ma descriveremo la versione di Wigner nell'ancora più intuitiva forma sviluppata da Sakurai [1985] e d'Espagnat [1980].

La correlazione esistente tra risultati di misure ottenute in regioni spazialmente separate suggerisce che i valori di tali osservazioni devono essere precedentemente determinati. Facciamo allora l'ipotesi che tutti i risultati, di tutte le possibili misurazioni, siano fissati sin dall'inizio, anche se le misurazioni si riferiscono ad osservabili incompatibili; sappiamo che è impossibile, secondo il formalismo della meccanica dei quanti, misurare simultaneamente i valori di due variabili coniugate come, per esempio, le componenti dello spin S_x ed S_z , ma secondo la nostra ipotesi, avendo un gran numero di sistemi di spin $1/2$, sarà comunque possibile attribuire ad una certa frazione di essi le proprietà:

Se si misura la componente S_x si ottiene con certezza il segno +

Se si misura la componente S_z si ottiene con certezza il segno -

Queste proprietà corrispondono agli elementi di realtà di Einstein. Indicheremo una particella con le caratteristiche sopra menzionate come appartenente all'insieme $(\vec{x}+, \vec{z}-)$.

Facciamo notare che non stiamo asserendo la possibilità di un'osservazione simultanea delle componenti S_x ed S_z , ma stiamo solamente assegnando definite componenti dello spin in più di una direzione, fermo restando che, senza violare il principio di Heisenberg, solo una delle due componenti sarà poi realmente misurata: eseguendo un'osservazione, i valori prefissati delle osservabili non compatibili

¹ All'analisi del rapporto esistente tra non località, trasformazioni di Lorentz e relatività dedicheremo il capitolo 7.

con l'osservabile misurata potranno cambiare, ma ciò non toglie che il valore di quell'osservabile non possa essere precedentemente determinato.

Lo schema deterministico di teoria della misura così costruito può rendere semplicemente conto della legge di perfetta anticorrelazione per le coppie di particelle nello stato di singoletto: per assicurare un momento di spin totalmente nullo, se la particella 1 appartiene all'insieme delle particelle con proprietà $(\vec{x}+, \vec{z}-)$, basterà assumere che la particella 2 sia del tipo opposto $(\vec{x}-, \vec{z}+)$, e similmente per tutte le altre possibili proprietà delle coppie:

Particella 1 *Particella 2*

$$(\vec{x}+, \vec{z}-) \iff (\vec{x}-, \vec{z}+)$$

$$(\vec{x}+, \vec{z}+) \iff (\vec{x}-, \vec{z}-)$$

$$(\vec{x}-, \vec{z}+) \iff (\vec{x}+, \vec{z}-)$$

$$(\vec{x}-, \vec{z}-) \iff (\vec{x}+, \vec{z}+)$$

Assumiamo adesso l'importante ipotesi di località: una misura eseguita sulla particella 1 non può in alcun modo modificare i valori inizialmente prefissati dello spin per la particella 2, se le particelle sono spazialmente separate: ad esempio, data una coppia di particella del primo tipo, un osservatore A che decide di misurare la componente S_z della particella 1 otterrà il valore +1, indipendentemente se l'altro osservatore B ha misurato per la particella 2 la componente S_x o la componente S_z . Le proprietà della particella 1 non dipendono da ciò che viene fatto alla particella 2, e viceversa.

Consideriamo ora tre vettori unitari qualunque \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} ; diremo allora che una particella appartiene all'insieme $(\vec{a}+, \vec{b}-, \vec{c}+)$ se, misurando la componente $\vec{\sigma} \cdot \vec{a}$ si ha con certezza +1, se misurando la componente $\vec{\sigma} \cdot \vec{b}$ si ha con certezza -1 e infine, se misurando la componente $\vec{\sigma} \cdot \vec{c}$ si ha con certezza +1. Analogamente possiamo definire per la particella altre possibili proprietà.

La conservazione dello spin totale nullo, e quindi la legge di perfetta anticorrelazione, è nuovamente assicurata dall'ipotesi di determinismo o predeterminazione: ad esempio, per ogni particella con proprietà $(\vec{a}+, \vec{b}-, \vec{c}+)$, l'altra particella della coppia avrà la proprietà corrispondente $(\vec{a}-, \vec{b}+, \vec{c}-)$:

$$(\vec{a}+, \vec{b}-, \vec{c}+) \iff (\vec{a}-, \vec{b}+, \vec{c}-)$$

In generale, ogni coppia di particelle apparterrà ad uno e uno solo degli otto insiemi possibili indicati nella tabella 1, essendo le otto possibilità mutuamente esclusive. Sia N il numero totale delle coppie prese in considerazione in ogni esperimento,

nella colonna a lato della tabella 4.1 è indicata la popolazione N_i ($i = 1, \dots, 8$) occupante ogni insieme.

POPOLAZIONE	PARTICELLA 1	PARTICELLA 2
N_1	$(\vec{a}+, \vec{b}+, \vec{c}+)$	$(\vec{a}-, \vec{b}-, \vec{c}-)$
N_2	$(\vec{a}+, \vec{b}+, \vec{c}-)$	$(\vec{a}-, \vec{b}-, \vec{c}+)$
N_3	$(\vec{a}+, \vec{b}-, \vec{c}+)$	$(\vec{a}-, \vec{b}+, \vec{c}-)$
N_4	$(\vec{a}+, \vec{b}-, \vec{c}-)$	$(\vec{a}-, \vec{b}+, \vec{c}+)$
N_5	$(\vec{a}-, \vec{b}+, \vec{c}+)$	$(\vec{a}+, \vec{b}-, \vec{c}-)$
N_6	$(\vec{a}-, \vec{b}+, \vec{c}-)$	$(\vec{a}+, \vec{b}-, \vec{c}+)$
N_7	$(\vec{a}-, \vec{b}-, \vec{c}+)$	$(\vec{a}+, \vec{b}+, \vec{c}-)$
N_8	$(\vec{a}-, \vec{b}-, \vec{c}-)$	$(\vec{a}+, \vec{b}+, \vec{c}+)$

Tabella 4.1

Supponiamo che l'osservatore A misuri per l'osservabile $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a}$ il valore +1 e che anche l'osservatore B ottenga lo stesso valore per $\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b}$. Allora la coppia di particelle apparterrà necessariamente o alla popolazione N_3 oppure alla popolazione N_4 . Il numero di coppie per cui accade tale evento è quindi pari alla somma $N_3 + N_4$. Ora, poiché è certamente $N_i \geq 0$, vale l'ovvia disuguaglianza:

$$N_3 + N_4 \leq N_3 + N_4 + N_2 + N_7. \quad (4.13)$$

Indichiamo con $P(\vec{a}+, \vec{b}+)$ la probabilità congiunta che A ottenga +1 per $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a}$ e che B misuri lo stesso valore per $\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b}$. Per $N = \sum_{i=1}^8 N_i$ molto elevato possiamo assumere:

$$P(\vec{a}+, \vec{b}+) = \frac{(N_3 + N_4)}{N}, \quad (4.14)$$

e in maniera analoga definiremo anche le probabilità:

$$P(\vec{a}+, \vec{c}+) = \frac{(N_2 + N_4)}{N} \quad \text{e} \quad P(\vec{c}+, \vec{b}+) = \frac{(N_3 + N_7)}{N}. \quad (4.15)$$

Dividendo per N sia il lato sinistro che destro della disuguaglianza (4.13) e associando le popolazioni in modo che si abbia

$$\frac{N_3 + N_4}{N} \leq \frac{N_2 + N_4}{N} + \frac{N_3 + N_7}{N}, \quad (4.16)$$

con le (4.14) e (4.15) si ottiene facilmente la nuova disuguaglianza :

$$P(\vec{a}+, \vec{b}+) \leq P(\vec{a}+, \vec{c}+) + P(\vec{c}+, \vec{b}+), \quad (4.17)$$

dedotta per la prima volta da Wigner.

Per completare la dimostrazione del teorema non resta che mostrare come la (4.17) venga violata in qualche caso dalle predizioni statistiche della teoria dei quanti. Dal formalismo quantistico, sappiamo che la probabilità $P(\vec{a}+, \vec{b}+)$ è pari a

$$P(\vec{a}+, \vec{b}+) = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2}, \quad (4.18)$$

dove θ_{ab} è l'angolo compreso tra i vettori \vec{a} e \vec{b} . La (4.18) è facilmente generalizzabile alle probabilità $P(\vec{a}+, \vec{c}+)$ e $P(\vec{c}+, \vec{b}+)$.

Dunque inserendo le probabilità quantistiche nella (4.17) otteniamo:

$$\frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \leq \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta_{ac}}{2} + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta_{cb}}{2}, \quad (4.19)$$

e certamente questa disuguaglianza non è valida per qualunque scelta degli angoli θ_{ab} , θ_{ac} e θ_{cb} . Supponiamo infatti, come precedentemente, che \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} siano complanari e che il vettore \vec{c} cada tra \vec{a} e \vec{b} , in modo che si abbia:

$$\theta_{ab} = 2\theta \quad e \quad \theta_{ac} = \theta_{cb} = \theta.$$

La disuguaglianza (4.19) sarà allora violata se

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Ad esempio, con $\theta = \pi/4$ otteniamo l'assurda disuguaglianza:

$$0.500 \leq 0.292,$$

ed il teorema di Bell risulta nuovamente dimostrato.

4.3 Le generalizzazioni del teorema di Bell

Sebbene il teorema di Bell segni un decisivo passo in avanti verso la verifica sperimentale dell'impossibilità di un'interpretazione locale e deterministica delle meccanica quantistica, purtroppo la (4.9) risulta difficilmente testabile nella sua forma originale.

Bell aveva dedotto la sua disuguaglianza immaginando una situazione fisica ideale, assumendo la possibilità di una perfetta correlazione tra le osservabili, assunzione difficile da soddisfare sperimentalmente (se non impossibile). Nella realtà è necessario tener conto della bassa efficienza dei rivelatori disponibili, dell'imperfezione degli analizzatori e in generale degli errori legati alla geometria dell'apparato e alla preparazione degli stati quantistici.

A Clauser, Horne, Shimony e Holt (CHSH) è dovuta la prima notevole generalizzazione del lavoro di Bell [Clauser et al. 1969]. Essi, tenendo conto delle

difficoltà sperimentali, propongono un esperimento in cui vi è l'effettiva possibilità di osservare la violazione della disuguaglianza di Bell.

Ispirandosi al lavoro di CHSH, nel 1971 Bell generalizza il suo teorema conseguendo un ulteriore notevole risultato. Egli dimostra come sia possibile dedurre disuguaglianze violabili dalla teoria dei quanti dalle sole ipotesi di realismo e località, senza la condizione di determinismo [Bell 1971].

Come osservato da alcuni autori, tra i quali Popper, l'eventuale incompatibilità tra teorie a variabili nascoste locali deterministiche e meccanica quantistica, poteva forse ascriversi alla sola ipotesi di determinismo [Clauser, Horne 1974].

Il nuovo teorema chiarisce definitivamente come l'impossibilità di replicare i risultati della meccanica quantistica sia da imputarsi esclusivamente alle sole richieste di località e realismo. Inoltre esso è applicabile tanto a teorie intrinsecamente stocastiche, non deterministiche, che a teorie deterministiche nella quale sono assunti parametri non controllabili associati agli strumenti di misurazione.

Bell ricava la nuova disuguaglianza:

$$|E(a, b) - E(a, b')| \leq \pm[E(a', b') + E(a', b)] + 2, \quad (4.57)$$

esprimibile nella forma piú compatta:

$$|E(a, b) - E(a, b')| + |E(a', b') + E(a', b)| \leq 2. \quad (4.58)$$

(Per una dimostrazione della (4.58) rimandiamo al Capitolo 6). Si può dimostrare che la disuguaglianza di CHSH non è che un caso particolare della (4.58). Dalla (4.58) segue anche la relazione

$$|E(a, b) - E(a, b') + E(a', b') + E(a', b)| \leq 2, \quad (4.59)$$

semplicemente ottenibile dalla [4.58] ricordando l'ovvia disuguaglianza $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$, $\forall \alpha, \beta \in \mathfrak{R}$.

Le disuguaglianze (4.58) e (4.59) rappresentano delle condizioni che tutte le teorie realistiche e locali, deterministiche o non, devono soddisfare.

Completiamo la dimostrazione del teorema mostrando come in alcuni casi le predizioni della meccanica quantistica contraddicano tali disuguaglianze. Consideriamo il sistema nello stato di singoletto e scegliamo di orientare gli analizzatori di Stern-Gerlach secondo gli angoli relativi $|a - b| = |a' - b| = |a' - b'| = \pi/4$ e $|a - b'| = 3\pi/4$. Allora è facile mostrare come le correlazioni quantistiche (4.5) verifichino l'equazione:

$$|E(a, b) - E(a, b')| + |E(a', b') + E(a', b)| = 2\sqrt{2}, \quad (4.60)$$

dunque la meccanica quantistica viola le disuguaglianze (4.58) e (4.59). Pertanto possiamo enunciare il fondamentale

Teorema generale di Bell: Nessun modello che soddisfi le ipotesi di realismo e località può riprodurre tutte le predizioni della teoria dei quanti.

4.4 Le prime verifiche sperimentali della disuguaglianza di Bell

Grazie alla disuguaglianza di Bell abbiamo finalmente la possibilità di distinguere sperimentalmente tra le predizioni delle teorie realistiche locali e quelle della teoria dei quanti. Dunque è comprensibile come il risultato di Bell abbia dato impulso ad un notevole numero di lavori sperimentali. In questo paragrafo ci limiteremo a dare di essi una sommaria esposizione⁷.

La maggior parte degli esperimenti eseguiti è stata dedicata alla verifica delle correlazioni quantistiche tra le polarizzazioni di coppie di fotoni con spin totale nullo.

Per tali correlazioni è possibile costruire una versione del teorema di Bell del tutto simile a quella per le correlazioni dello spin. Infatti, come osservato nel secondo capitolo, la polarizzazione dell'onda elettromagnetica è in stretta relazione con lo spin del fotone, essendo gli stati di spin parallelo od antiparallelo al momento del fotone corrispondenti ai due stati possibili della polarizzazione circolare.

Una prima serie di esperimenti ha visto coinvolte le coppie di fotoni γ prodotte nell'annichilazione elettrone-positrone. Per via della non esistenza di analizzatori di polarizzazione per fotoni ad alta energia (0.5 MeV) le misure della polarizzazione sono state eseguite attraverso l'analisi della dipendenza dall'angolo di polarizzazione della diffusione Compton [Bohm, Aharonov 1957]. In modo indiretto è stato quindi possibile scoprire una delle prime violazioni della disuguaglianza di Bell [Kasday et al. 1970].

Nel 1976 Laméhi-Rachti e Mittig hanno eseguito direttamente misure di correlazione dello spin su coppie di protoni. Nel loro esperimento un fascio di protoni veniva accelerato contro un bersaglio costituito da atomi d'idrogeno. Nella diffusione protone-protone che si realizzava dopo la collisione lo spin totale dei protoni diffusi era lasciato principalmente nello stato di singoletto. Anche qui i risultati si sono rivelati in accordo con le previsioni quantistiche [Clauser, Shimony 1978].

I tests compiuti negli anni '70 e nei primi anni '80 hanno però fatto uso in larga maggioranza di coppie di fotoni prodotti con momento angolare nullo da atomi di calcio nella transizione di diseccitazione $^1S_o \rightarrow ^1P_1 \rightarrow ^1S_o$. Infatti, in tale processo l'emissione dei fotoni avviene nella regione dello spettro visibile e ciò permetteva l'utilizzo degli analizzatori di polarizzazione comportando una notevole riduzione delle difficoltà sperimentali.

Tuttavia, per ragioni pratiche, i primi sperimentatori hanno adoperato soltanto polarizzatori a singolo canale, cioè che trasmettono la luce polarizzata parallelamente ad un certo asse e bloccano la luce polarizzata perpendicolarmente ad esso.

Si tratta di esperimenti simili a quelli eseguiti da Freedman e Clauser [1972] e descritti in precedenza all'interno di questo capitolo.

Negli anni '80 Aspect e i suoi collaboratori hanno realizzato gli esperimenti che più si avvicinano al caso ideale immaginato da Bell. Analizziamo il loro lavoro più accuratamente [Aspect et al. 1981].

⁷ Per un dettagliato resoconto dei primi esperimenti rimandiamo all'articolo di J. F. Clauser e A. Shimony [1978].

Figura 4.4 a) Il diagramma della cascata di fotoni dell'atomo di calcio b) L'esperimento realizzato dal gruppo di Aspect per le misure dei tassi di coincidenza $N_{\pm\pm}(\vec{a}, \vec{b})$. Ruotando i polarizzatori è possibile misurare la funzione di correlazione per diversi orientamenti di \vec{a} e di \vec{b} .

Essi hanno adoperato come sorgenti di fotoni la stessa cascata dell'atomo di calcio introdotta da Clauser e Freedman (figura 4.4a) ma nel loro apparato hanno utilizzato polarizzatori a due canali. Tali polarizzatori lasciano passare i fotoni con polarizzazione parallela ad un certo asse \vec{a} mentre riflettono quelli con polarizzazione ad esso ortogonale. I divisori di polarizzazione erano montati su un meccanismo ruotante assieme a due fotomoltiplicatori. Alle misure di polarizzazione parallela ed ortogonale all'asse dell'analizzatore venivano associati rispettivamente i valori $+1$ e -1 .

Attraverso il circuito schematizzato nella figura 4.4b, capace di registrare le rivelazioni che avvenivano simultaneamente su entrambi i lati dell'apparato, gli sperimentatori hanno misurato i tassi di coincidenza $N_{\pm\pm}(\vec{a}, \vec{b})$. Il coefficiente di correlazione osservato era

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{N_{++}(\vec{a}, \vec{b}) + N_{--}(\vec{a}, \vec{b}) - N_{+-}(\vec{a}, \vec{b}) - N_{-+}(\vec{a}, \vec{b})}{N_{++}(\vec{a}, \vec{b}) + N_{--}(\vec{a}, \vec{b}) + N_{+-}(\vec{a}, \vec{b}) + N_{-+}(\vec{a}, \vec{b})}.$$

Ripetendo le misure per quattro diversi insiemi di orientamenti, è stato possibile controllare la validità della disuguaglianza di Bell di tipo CHSH: $\Delta \leq 2$, dove

$$\Delta = E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{b}') + E(\vec{a}', \vec{b}) + E(\vec{a}', \vec{b}').$$

Sperimentalmente essi hanno ricavato per il valore massimo di Δ :

$$\Delta_S = 2.697 \pm 0.015,$$

in ottimo accordo col risultato predetto quantisticamente:

Figura 4.5 L'esperimento del gruppo di Aspect con i commutatori ottici. Ogni dispositivo commutatore $C1$ e $C2$ è seguito da polarizzatori a singolo canale aventi diverso orientamento. I commutatori dirigono i fotoni verso uno o verso l'altro degli analizzatori.

$$\Delta_{QM} = 2.70 \pm 0.05.$$

Il valore sperimentale Δ_s supera il limite della disuguaglianza di Bell di ben 40 deviazioni standard. Facciamo notare però come per via della bassa efficienza di rivelazione gli autori abbiano dovuto assumere che la frazione delle sole coppie osservate fosse un corretto campione statistico di tutte le coppie effettivamente emesse. Infatti, soltanto sotto tale ipotesi la funzione di correlazione sperimentale può essere identificata con quella reale (per maggiori chiarimenti a riguardo rimandiamo al paragrafo 9.1).

Una richiesta essenziale per un test valido della disuguaglianza di Bell è che le misurazioni degli eventi congiunti siano spazialmente separate in senso relativistico. Ciò può essere conseguito facendo variare i parametri strumentali così velocemente nel tempo da non permettere durante la misurazione ai sistemi di scambiarsi segnali con velocità minore o uguale a quella della luce.

Il primo esperimento di questo tipo è stato eseguito da Aspect, Dalibard e Roger nel 1982. Esso è considerato da molti il test che ha provato l'esistenza della non località in modo definitivo [Aspect et al. 1982].

Nell'ingegnoso esperimento del gruppo di Aspect ogni polarizzatore statico dello schema 4.4b era sostituito da un dispositivo commutatore seguito da due polarizzatori posti in due differenti orientamenti. Il commutatore inviava la luce alternativamente verso uno o l'altro dei due polarizzatori (figura 4.5). Tale funzionamento era realizzato attraverso una riflessione di Bragg causata da un'onda ultrasonica stazionaria generata all'interno di un recipiente contenente acqua. Quando l'ampiezza dell'onda stazionaria era zero, la luce era quasi completamente trasmessa, quando invece l'ampiezza era massima, la luce era quasi completamente deflessa per diffrazione ad un dato angolo.

I cambiamenti dei due canali accadevano una volta ogni 10 ns , mentre tra le coppie di commutatori vi era una distanza pari a $L = 12\text{ m}$, per cui $L/c \simeq 40\text{ ns}$.

Dunque la rivelazione di un fotone in un lato dell'apparato e il cambiamento dell'orientamento dell'analizzatore sull'altro lato corrispondevano ad eventi spazialmente separati. Pertanto, la possibile trasmissione di un fotone attraverso un analizzatore non poteva essere influenzata dall'orientamento assunto dall'altro analizzatore.

Ma anche questa volta i tassi di coincidenza sperimentalmente stimati sono stati trovati in ottimo accordo con i risultati quantistici e in contrasto con le previsioni dei modelli a variabili nascoste locali⁸.

4.5 Il teorema dell'impossibilità di segnali superluminali

Sappiamo come uno dei principi fondamentali della teoria della relatività stabilisca l'impossibilità di azioni istantanee a distanza e in generale di effetti superluminali. D'altra parte il teorema di Bell ha dimostrato come la forma delle correlazioni quantistiche implichi necessariamente l'esistenza di tali fenomeni: una contraddizione logica sembra dunque sorgere tra meccanica quantistica e teoria della relatività.

Tuttavia, come asserisce un semplice teorema, le correlazioni quantistiche non permettono l'invio di segnali superluminali. Ciò, sebbene lasci non risolti alcuni problemi d'interpretazione, permette almeno un accordo formale tra le due teorie. Un esempio può illustrare l'argomentazione della dimostrazione alla base di tale teorema.

Supponiamo che due sperimentatori separati O_L ed O_R abbiano deciso in precedenza di misurare sulle loro rispettive particelle L e R nello stato di singoletto il valore della stessa osservabile S_z . Allora O_R conoscerà dopo ogni misura il valore ottenuto da O_L , e viceversa. Sia O_L che O_R ottengono separatamente dopo una serie di prove una sequenza casuale di valori $+1$ o -1 con media nulla: è soltanto quando gli sperimentatori confrontano insieme i propri dati che possono verificare l'esistenza delle correlazioni tra misurazioni congiunte.

Immaginiamo ora che O_L decida senza avvisare il suo compagno di misurare una nuova osservabile, ad esempio S_x . I nuovi risultati saranno tra loro totalmente scorrelati, ma O_R osserverà una sequenza casuale di valori positivi e negativi statisticamente del tutto identica alla precedente, e nulla potrà sapere della vera misura eseguita da O_L . Dunque egli non può ricavare dai suoi dati alcuna informazione riguardo alle azioni compiute dall'altro sperimentatore. In definitiva né O_R né O_L possono ricevere o trasmettere messaggi superluminali.

⁸ Per costruzione, la variazione dei cammini avveniva in modo periodico; in un test veramente rigoroso essa dovrebbe essere invece del tutto casuale. Ma in anni recenti anche questa condizione è stata sperimentalmente soddisfatta [Tittel et al. 1998] [Weihs et al. 1998].

Capitolo 5

Altre forme di non località

La non località delle correlazioni quantistiche non appare solo nei sistemi entangled delle osservabili di spin o di polarizzazione, ma essa è del tutto generale e condivisa da qualunque tipo di stato non fattorizzabile.

In questo breve capitolo presenteremo un esempio di non località che vede coinvolte le osservabili dell'impulso.

5.1 Non località per fase ed impulso

Il recente campo dell'interferometria a due particelle offre agli sperimentatori nuove ed interessanti possibilità [Horne et al. 1989]. Gli attuali progressi tecnici permettono infatti la preparazione di sistemi entangled relativi ad osservabili differenti dallo spin o dalla polarizzazione e aprono quindi la strada a verifiche più generali della disuguaglianza di Bell. In questo paragrafo descriveremo un test effettivamente eseguito che coinvolge la fase e l'impulso e in cui è stata osservata una nuova violazione della disuguaglianza di Bell.

In generale l'interferometria a due sistemi si basa su tecniche di ricombinazione di fasci di particelle preparate in uno stato entangled di una data osservabile. L'esperimento proposto da Horne, Shimony e Zeilinger, coinvolge una funzione d'onda entangled del momento lineare. In esso una sorgente emette coppie di particelle nello stato:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|k_A\rangle_1|k_C\rangle_2 + |k_D\rangle_1|k_B\rangle_2), \quad (5.1)$$

dove k_A, k_B, k_C, k_D rappresentano i vettori d'onda associati all'impulso soddisfacenti la condizione $|k_A| = |k_D|$ e $|k_B| = |k_C|$. A, B, C e D indicano le possibili direzioni di emissione delle particelle (figura 5.1) mentre $|k_A\rangle_1, |k_C\rangle_2, |k_D\rangle_1$ e $|k_B\rangle_2$ vengono considerati approssimativamente come autostati dell'operatore momento.

Lo stato iniziale $|\psi\rangle$ del sistema è una sovrapposizione coerente di due possibilità: la particella 1 è emessa lungo A e la particella 2 lungo C, oppure la particella 1 è emessa lungo D e la particella 2 lungo B.

Figura 5.1 Schema dell'esperimento d'interferometria a due particelle. L'apparato è costituito da due interferometri di Mach-Zehnder identici. I sistemi sono emessi lungo le direzioni AC e DB, vengono riflessi dagli specchi M_A , M_B , M_C e M_D , sono soggetti alle variazioni di fase ϕ_1 e ϕ_2 , sono suddivisi dagli specchi semiriflettenti H_1 e H_2 , ed infine vengono osservati dai detectors U_i e L_i . Le grandezze d'interesse sono i tassi di coincidenza dei rivelatori.

I due sistemi, dopo essere stati riflessi dagli specchi M_A , M_B , M_C e M_D , sono soggetti sui cammini D e C a cambiamenti di fase controllabili dagli sperimentatori. Ogni particella può essere trasmessa o riflessa con uguale probabilità dagli specchi semiriflettenti H_1 e H_2 ed infine essere rivelata dai detectors U_i e L_i .

Studiamo l'evoluzione di $|\psi\rangle$ all'interno dell'apparato sperimentale.

Agli specchi M_A , M_C , M_D e M_B , gli stati $|k_A\rangle_1$, $|k_C\rangle_2$, $|k_D\rangle_1$ e $|k_B\rangle_2$ subiscono una riflessione e un cambiamento di fase:

$$|k_A\rangle_1 \rightarrow i|k_D\rangle_1, \quad |k_C\rangle_2 \rightarrow i|k_B\rangle_2, \quad |k_D\rangle_1 \rightarrow i|k_A\rangle_1, \quad |k_B\rangle_2 \rightarrow i|k_C\rangle_2,$$

e dunque, poiché l'evoluzione è lineare:

$$|\psi\rangle \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}(|k_D\rangle_1|k_B\rangle_2 + |k_A\rangle_1|k_C\rangle_2). \quad (5.2)$$

Sui cammini D e C i kets $|k_D\rangle_1$ e $|k_C\rangle_2$ sono soggetti rispettivamente ai cambiamenti di fase ϕ_1 e ϕ_2 , per cui la (5.2) diviene¹:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\phi_1}|k_D\rangle_1|k_B\rangle_2 + e^{i\phi_2}|k_A\rangle_1|k_C\rangle_2). \quad (5.3)$$

¹ A rigore dovremmo inserire uno sfasamento costante θ tra gli stati $|k_D\rangle_1|k_B\rangle_2$ e $|k_A\rangle_1|k_C\rangle_2$, per tener conto delle differenze di posizionamento degli specchi e dei divisori di fascio. Ma poiché tale sfasamento è indipendente da ϕ_1 e ϕ_2 , assumiamo per semplicità $e^{i\theta} = 1$.

Ai divisori di fascio $|k_A\rangle_1$, $|k_C\rangle_2$, $|k_D\rangle_1$ e $|k_C\rangle_2$ evolvono invece seguendo le trasformazioni unitarie:

$$|k_D\rangle_1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|k_D\rangle_1 + i|k_A\rangle_1), \quad |k_B\rangle_2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|k_B\rangle_2 + i|k_C\rangle_2), \quad (5.4a)$$

$$|k_A\rangle_1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|k_A\rangle_1 + i|k_D\rangle_1), \quad |k_C\rangle_2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|k_C\rangle_2 + i|k_B\rangle_2). \quad (5.4b)$$

Lo stato (5.3), dopo aver oltrepassato i divisori di fascio H_1 e H_2 , assume quindi la forma:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{i\phi_1}(|k_D\rangle_1|k_B\rangle_2 + i|k_D\rangle_1|k_C\rangle_2 + i|k_A\rangle_1|k_B\rangle_2 - |k_A\rangle_1|k_C\rangle_2) \\ & -\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{i\phi_2}(|k_A\rangle_1|k_C\rangle_2 + i|k_A\rangle_1|k_B\rangle_2 + i|k_D\rangle_1|k_C\rangle_2 - |k_D\rangle_1|k_B\rangle_2). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Calcoliamo ora la probabilità che le particelle vengano congiuntamente rivelate nei detectors U_1 e U_2 . Ispezionando la (5.5) e osservando la figura 5.1, si deduce dalla regola di Born che la probabilità cercata è pari al modulo quadrato del coefficiente dello stato $|k_A\rangle_1|k_B\rangle_2$:

$$P(U_1, U_2|\phi_1, \phi_2) = \left| \frac{i}{2\sqrt{2}}(e^{i\phi_1} + e^{i\phi_2}) \right|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos(\phi_2 - \phi_1). \quad (5.6)$$

Ragionando in modo analogo, dalla (5.5) possiamo dedurre anche tutte le altre probabilità congiunte:

$$\begin{aligned} P(L_1, L_2|\phi_1, \phi_2) &= P(U_1, U_2|\phi_1, \phi_2) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos(\phi_2 - \phi_1), \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} P(U_1, L_2|\phi_1, \phi_2) &= P(L_1, U_2|\phi_1, \phi_2) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos(\phi_2 - \phi_1). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Osservando la (5.7) e la (5.8) notiamo come le probabilità mostrino in funzione della differenza di fase $\phi_2 - \phi_1$, la tipica dipendenza sinusoidale dei fenomeni d'interferenza. Ma ora l'interferenza riguarda solo i tassi di rivelazione coincidenti delle due particelle, infatti, come si può facilmente verificare, la probabilità di rivelare una particella ad un detector è una costante indipendente da ϕ_1 e ϕ_2 :

$$\begin{aligned} P(U_1|\phi_1, \phi_2) &= P(U_1, U_2|\phi_1, \phi_2) + P(U_1, L_2|\phi_1, \phi_2) \\ &= P(U_2|\phi_1, \phi_2) = P(L_1|\phi_1, \phi_2) = P(L_2|\phi_1, \phi_2) = 1/2, \end{aligned} \quad (5.9)$$

perciò le singole particelle a ciascun divisore di fascio non manifestano alcun fenomeno d'interferenza.

Per esempio, se $\phi_1 = \phi_2$, abbiamo dalle (5.7) e (5.8):

$$P(U_1, L_2|\phi_1 = \phi_2) = P(L_1, U_2|\phi_1 = \phi_2) = 0,$$

e

$$P(U_1, U_2|\phi_1 = \phi_2) = P(L_1, L_2|\phi_1 = \phi_2) = 1/2,$$

dunque le particelle vengono rivelate in coincidenza solo nei detectors in alto U_1 e U_2 o nei detectors in basso L_1, L_2 (si veda la figura 5.1) e mai accadono eventi nei quali i rivelatori in alto U_i scattano insieme a quelli in basso L_i . Ma la probabilità che ha ogni particella di essere rivelata da ciascun detector, per le (5.9), è comunque $1/2$.

Dunque è possibile associare ai detectors U_1, L_1 e U_2, L_2 rispettivamente due variabili dicotomiche A e B, assegnando per esempio ad A il valore $+1$ se scatta il rivelatore U_1 e -1 se scatta il detector L_1 . E come svolto in precedenza, di queste variabili è possibile calcolare la funzione di correlazione in funzione dei parametri ϕ_1 e ϕ_2 . Ricordando la (5.7) e la (5.8):

$$\begin{aligned} E(\phi_1, \phi_2) &= P_{++}(U_1, U_2|\phi_1, \phi_2) + P_{--}(L_1, L_2|\phi_1, \phi_2) \\ &\quad - P_{+-}(U_1, L_2|\phi_1, \phi_2) - P_{-+}(L_1, U_2|\phi_1, \phi_2) = \cos(\phi_2 - \phi_1), \end{aligned} \quad (5.10)$$

Combinando quattro diverse funzioni di correlazione per diversi angoli di fase possiamo costruirci la funzione

$$\Delta = E(\phi_1, \phi_2) - E(\phi_1, \phi'_2) + E(\phi'_1, \phi_2) + E(\phi'_1, \phi'_2),$$

necessaria per verificare la disuguaglianza di Bell:

$$-2 \leq \Delta \leq 2. \quad (5.11)$$

Rarity e Tapster hanno effettivamente realizzato il test appena proposto. Nel loro apparato sperimentale le coppie di fotoni correlati sono prodotte tramite sottoconversione parametrica di un fotone. In questo fenomeno, un fotone incidente su di un cristallo non lineare si scinde in una coppia di fotoni di frequenza più bassa, in maniera tale che le leggi di conservazione dell'energia e dell'impulso siano soddisfatte. Le coppie di fotoni sono selezionate nello stato entangled del momento (5.1) da un sistema di doppie fenditure (figura 5.2). Come suggerito da Franson,

Figura 5.2 Schema dell'apparato sperimentale di Rarity e Tapster. Le coppie di fotoni correlati sono prodotti per sotto-conversione di un fotone incidente in un cristallo non lineare, sotto la condizione che vengano soddisfatte le leggi di conservazione dell'energia e dell'impulso.

per realizzare in corrispondenza dei divisori di fascio misurazioni spazialmente separate, lo schema di Rarity e Tapster si può trasformare facilmente nell'apparato topologicamente equivalente della figura 5.1.

Scegliendo come disposizioni degli angoli di fase $\phi_1 = 0$, $\phi'_1 = \pi/2$, $\phi_2 = \pi/4$, e $\phi'_2 = 3\pi/4$, e misurando le correlazioni in funzione dei tassi di coincidenza, Rarity e Tapster ricavano per Δ il valore sperimentale:

$$\Delta = 2.21 \pm 0.02,$$

il quale viola nettamente la (5.11).

Grazie all'utilizzo di rivelatori allo stato solido di grande efficienza nel vicino infrarosso, e all'alta correlazione angolare dei fotoni prodotti per sotto-conversione, i tassi di coincidenza misurati da Rarity e Tapster sono di un ordine di grandezza superiori a quelli dei tests in cui i fotoni hanno origine da cascate atomiche. Pertanto questo tipo di esperimenti si porta molto vicino all'osservazione ideale della violazione della disuguaglianza di Bell, senza le ipotesi addizionali di tipo CH o CHSH.

Citiamo per la loro rilevanza sperimentale i tests sulla correlazione delle polarizzazioni di coppie di fotoni EPR prodotti per sotto-conversione parametrica di Shih ed Alley [1988] e di Ou e Mandel [1988].

Capitolo 6

Contestualità e non località

Sappiamo oggi come si possa dimostrare che
la luna non è là quando nessuno la guarda.
D. Mermin

Nella prima parte di questo capitolo presenteremo l'importante teorema di Bell-Kochen-Specker. Esso esprime l'impossibilità di assegnare valori alle osservabili quantistiche prima dell'atto di misurazione in maniera indipendente dal contesto sperimentale.

La sua seconda parte sarà invece dedicata all'analisi del rapporto tra contestualità e non località. In particolare descriveremo l'interessante lavoro di Greenberger, Horne e Zeilinger. Questi autori, grazie all'introduzione di nuove forme di stati entangled, hanno dedotto una dimostrazione del teorema di Bell che non necessita di disuguaglianze.

6.1 L'interpretazione statistica della teoria quantistica

Il fondamentale teorema di Bell, Kochen e Specker ¹ sebbene meno famoso rispetto al teorema di Bell sulla non località, ha implicazioni non meno profonde per l'interpretazione del formalismo quantistico.

Uno tra i più dibattuti problemi che affliggono i fondamenti della teoria dei quanti è se le proprietà degli oggetti quantistici possiedano o meno valori prima di un'osservazione.

È una fondamentale dottrina quantistica che una misurazione, in generale, non rivela un valore preesistente di una proprietà misurata. Al contrario, l'esito di

¹ Il teorema fu pubblicato da Bell nel 1966 [Bell 1966] e indipendentemente da Kochen e Specker nell'anno successivo [Kochen, Specker 1967]. Tuttavia l'articolo di Bell, dato alle stampe in ritardo per un problema editoriale, precede il lavoro sulla non località del 1964 il quale, come vedremo, ne è la logica conseguenza.

una misura viene in essere attraverso l'atto di misura stesso, una manifestazione congiunta dello stato soggetto alla misurazione e dell'apparato misuratore [Mermin 1993].

Tuttavia, secondo Einstein, Popper e tanti altri [Ballentine 1970] una piú semplice e plausibile spiegazione è alla nostra portata.

È sufficiente infatti assumere che il vettore di stato non dia una descrizione completa di un sistema individuale ma che esso si riferisca ad un insieme di sistemi in cui ogni membro ha per ogni osservabile concepibile un ben definito valore: una misurazione di un'osservabile su un sistema individuale rivela semplicemente un valore preesistente all'atto della misura a noi in precedenza sconosciuto.

È vero che il principio d'indeterminazione ci rende impossibile la simultanea ed esatta conoscenza della posizione e della velocità di una particella, ma nulla ci vieta di immaginare che essa possieda un impulso ed una posizione ben definiti, anche se per noi inconoscibili. Ciò che non è misurabile, come afferma M. Adler, non deve confondersi con ciò che è inesistente o irreali.

Questo è per sommi capi il “credo” dell'interpretazione statistica. Riassumendo, i punti fondamentali su cui tale interpretazione è basata sono:

- (1) Il vettore di stato non costituisce una descrizione completa di un sistema individuale ma è associato ad un insieme di sistemi concettualmente infinito.
- (2) Ogni sistema quantistico individuale possiede valori simultaneamente determinati di tutte le sue osservabili, commutanti o non commutanti.
- (3) La misurazione è semplicemente la selezione di un sottoinsieme dell'insieme totale dei sistemi avente le proprietà rivelate ancor prima dell'osservazione.

Dunque è soltanto la mera riverenza verso i Patriarchi che ci porta a negare che una misura rivela un valore che era già là, prima della osservazione? [Mermin 1993]

Bell, Kochen e Specker (BKS) trasformano quella che poteva apparire un'arbitraria presa di posizione filosofica dei padri fondatori in un'interpretazione della misurazione quantistica la cui giustificazione risiede nella struttura formale della teoria stessa.

Essi dimostrano infatti in modo rigoroso l'impossibilità di assegnare valori ad un'osservabile prima dell'atto di misurazione indipendentemente dalle osservabili compatibili con essa congiuntamente misurate, giungendo ad una definitiva confutazione della forma di realismo professato da Einstein e da Popper. Pertanto, in accordo con Bohr, il valore assunto da un'osservabile A deve dipendere dalla completa specificazione del contesto sperimentale.

Piú in generale, vedremo che il teorema dimostra l'incompatibilità tra il formalismo quantistico e una sua interpretazione in termini di teorie a variabili nascoste di tipo non contestuale.

6.2 Il teorema di Bell, Kochen e Specker

Consideriamo l'insieme di tre operatori A , L , P , dove A commuta con L e con P mentre $[L, P] \neq 0$. Se per la teoria vale la condizione di non contestualità, il risultato $v(A)$ di una misurazione dell'osservabile A è fissato soltanto dalla scelta dell'osservabile A da misurare e dalle proprietà oggettive del sistema, cioè dall'esistenza di eventuali elementi di realtà o dalle variabili nascoste, ed è ininfluente se A è misurato insieme a L oppure a P , anche se L e P sono osservabili incompatibili. In altri termini, se indichiamo i risultati delle possibili misurazioni relative ad un sistema individuale:

$$\{v(A), v(L)\}, \quad \{v(A), v(P)\}, \quad (6.1)$$

i valori $v(A)$ devono considerarsi identici in ambedue gli insiemi delle possibili misurazioni:

$$\{A, L\}, \quad \{A, P\}. \quad (6.2)$$

Naturalmente $v(A)$, $v(L)$, $v(P)$ devono essere scelti tra gli autovalori delle rispettive osservabili A , L , e P .

Ad esempio, il quadrato del momento angolare $S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$ commuta con gli operatori componenti S_x e S_y , mentre S_x e S_y , non commutano tra loro. La condizione di non contestualità richiede che da una misura di S^2 si ottenga sempre il medesimo valore indipendentemente se l'osservabile è misurata da sola o congiuntamente alle osservabili S_x e S_y .

Sia i lavori di Bell che di Kochen e Specker si assumono il compito di chiarire il reale significato del teorema di Von Neumann ed entrambi prendono le mosse da un importante studio sugli assiomi della meccanica quantistica eseguito da Gleason [1957].

Bell, Kochen e Specker comprendono per primi che nel lavoro di Gleason vi è una dimostrazione corretta della non esistenza di teorie a variabili nascoste, ma ristretta al solo insieme dei modelli di tipo non contestuale. I lavori di Bell e Kochen-Specker non sono che versioni del teorema di Gleason portato alle sue corrette conseguenze.

Andiamo ora ad enunciare il teorema BKS. Sia A un generico operatore hermitiano nello spazio di Hilbert di dimensione n , indichiamo con $\{a_i\}$ e $\{|a_i\rangle\}$ rispettivamente gli autovalori e gli autovettori di A . Introduciamo gli operatori di proiezione $P_i = |a_i\rangle\langle a_i|$ sui sottospazi unidimensionali dello spazio di Hilbert \mathcal{H}^n con autovalori $v(P_i) = 0, 1$. È immediato verificare che l'operatore A ammette la decomposizione spettrale:

$$A = \sum_{i=1}^n a_i P_i, \quad (6.3)$$

essendo $\{P_i\}_{i=1}^n$ un insieme completo di operatori di proiezione, cioè soddisfacenti la condizione di completezza $\sum_{i=1}^n P_i = I$, dove I rappresenta l'operatore identità. Dunque la misurazione dell'osservabile A è equivalente alla misura simultanea dei valori delle osservabili compatibili $\{P_i\}_{i=1}^n$. Ad esempio, se il risultato della misura

di A è l'autovalore a_m , assegneremo rispettivamente al proiettore P_m l'autovalore 1 e agli altri $n - 1$ proiettori l'autovalore 0. In definitiva, il valore di un'osservabile può rappresentarsi come un insieme di n proposizioni a cui viene assegnato il valore vero o falso a seconda che i proiettori associati assumano rispettivamente i valori 1 o 0.

Dato un sistema fisico individuale, indicheremo con $v(\mathbf{u})$ il valore di verità 1 (vero) o 0 (falso) della proposizione $P_{\mathbf{u}}$ rappresentata dal proiettore $|\mathbf{u}\rangle\langle\mathbf{u}|$. Il teorema di Bell-Kochen-Specker ha il seguente enunciato:

Teorema di Bell-Kochen-Specker: È impossibile associare ad ogni proposizione P_u un definito valore 1 o 0 in modo tale che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

- (a) **Ipotesi di non contestualità:** Per un sistema individuale ad ogni proposizione P_u è possibile assegnare il valore 1 oppure 0, indipendentemente dalle altre proposizioni compatibili con essa congiuntamente testate.
- (b) Dato un insieme completo di proposizioni compatibili, la cui somma è l'operatore identità in uno spazio di Hilbert n -dimensionale degli stati del sistema, ad una e ad una soltanto delle proposizioni è assegnato il valore 1, mentre a tutte le altre $n-1$ è attribuito il valore 0.

L'ipotesi (b) può essere formalizzata in questo modo: se $\sum_{i=1}^n P_i = I$ allora

$$\sum_{i=1}^n v(P_i) = 1, \quad (6.4)$$

dove necessariamente ad un unico $v(P_i)$ è assegnato il valore 1 e a tutti gli altri il valore 0.

L'ipotesi (a) può invece essere chiarita con un esempio. Consideriamo due osservabili non commutanti A e B , ponendo per semplicità $n = 3$, siano $|a_1\rangle, |a_2\rangle, |a_3\rangle$ e $|b_1\rangle, |b_2\rangle, |b_3\rangle$ i rispettivi autovettori ortogonali. Sia $|a_1\rangle = |b_1\rangle = |a\rangle$ un autovettore in comune ai due operatori. Introduciamo quindi i due insiemi di proiettori:

$$\{ P_a = |a\rangle\langle a|, \quad P_{a_2} = |a_2\rangle\langle a_2|, \quad P_{a_3} = |a_3\rangle\langle a_3| \},$$

e

$$\{ P_a = |a\rangle\langle a|, \quad P_{b_2} = |b_2\rangle\langle b_2|, \quad P_{b_3} = |b_3\rangle\langle b_3| \}.$$

Ognuno dei quali è un insieme completo,

$$\begin{aligned} P_a + P_{a_2} + P_{a_3} &= \\ P_a + P_{b_2} + P_{b_3} &= I, \end{aligned} \quad (6.5)$$

per l'ipotesi (b), segue dalle (6.4) che

$$\begin{aligned} v(P_a) + v(P_{a_2}) + v(P_{a_3}) &= \\ v(P_a) + v(P_{b_2}) + v(P_{b_3}) &= 1, \end{aligned} \quad (6.6)$$

La condizione di non contestualità implica che il valore di $v(P_a)$ fissato dalle variabili nascoste presente nelle due righe della (6.5) sia il medesimo, anche se esso si riferisce a due diverse incompatibili disposizioni sperimentali.

Notiamo inoltre che se $v(P_a) = 1$ allora $v(P_{a_2}) = v(P_{a_3}) = 0$ e $v(P_{b_2}) = v(P_{b_3}) = 0$, dunque un vincolo sui valori assegnati tra osservabili compatibili, per la condizione di non contestualità, si trasforma in un vincolo tra i valori di osservabili incompatibili.

La descrizione dello spazio degli stati tridimensionali tramite l'algebra di una particella di spin 1 permette la costruzione di semplici realizzazioni fisiche del teorema BKS.

Consideriamo ad esempio un sistema con spin $s=1$, per esso l'osservabile S^2 assume l'autovalore $s(s+1) = 2$ (avendo posto per comodità $\hbar = 1$), inoltre:

$$S_{\vec{u}}^2 + S_{\vec{v}}^2 + S_{\vec{w}}^2 = 2I, \quad (6.7)$$

dove I rappresenta l'operatore identità, \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} indicano tre generiche direzioni ortogonali, mentre $S_{\vec{u}}^2$, $S_{\vec{v}}^2$ e $S_{\vec{w}}^2$ sono osservabili commutanti, quadrati delle componenti del momento angolare lungo le tre direzioni specificate.

Assumiamo, secondo le ipotesi di realismo e non contestualità, che ad ogni osservabile $S_{\vec{x}}^2$, per qualunque direzione \vec{x} , sia attribuito il valore 1 o 0, in modo che, per qualunque tripletta di vettori ortogonali, per la (6.7) sia soddisfatta la relazione:

$$v(S_{\vec{u}}^2) + v(S_{\vec{v}}^2) + v(S_{\vec{w}}^2) = 2. \quad (6.8)$$

Possiamo definire immediatamente dei proiettori ortogonali come

$$P_x = 1 - S_x^2, \quad (6.9)$$

ed è immediato verificare come essi, per le (6.7) e (6.8), soddisfino le ipotesi (a) e (b). Il teorema ci permette di affermare che è impossibile assegnare alle osservabili in questione dei valori 0 od 1 in modo da soddisfare la (6.8) per qualunque tripletta di raggi ortogonali.

La sua dimostrazione, conseguita nello spazio di Hilbert di dimensione $n = 3$, può tradursi nel semplice problema topologico di colorare la superficie di una sfera nell'ordinario spazio Euclideo con due soli colori, associando ad ogni valore di verità delle proposizioni un colore, per esempio il verde per 1 ed il rosso per 0. Secondo il teorema è impossibile colorare tutta la superficie della sfera in modo tale che qualsiasi tripletta di raggi ortogonali che taglia la sfera in tre punti rispetti le condizioni:

- (1) Uno e un solo punto della tripletta è di colore verde.
- (2) Due e due soltanto dei punti della tripletta sono di colore rosso.

In particolare Kochen e Specker verificano quest'impossibilità facendo uso di un sottoinsieme di 117 punti della superficie sferica e mostrando come per ogni tentativo di colorare questi punti secondo le condizioni stabilite, esiste sempre una

tripletta ortogonale che viola tali regole, cioè per ogni possibile distribuzione di colore sui punti, esiste sempre una tripletta ortogonale con 2 punti verdi.

La dimostrazione originale di Kochen e Specker è piuttosto complessa, pertanto qui riporteremo soltanto la piú semplice deduzione di Bell.

Dimostreremo il teorema topologico equivalente al teorema BKS². Verificheremo cioè che è impossibile colorare una sfera di rosso e verde in modo da soddisfare le condizioni (1) e (2).

Scegliamo come vettore unitario $\hat{\mathbf{z}}$, indicante la direzione dell'asse z , un vettore verde, con la condizione che accanto ad esso cada un vettore rosso $\vec{\mathbf{a}}$ in modo tale che, definito il piano yz , si possa scrivere $\vec{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{z}} + \alpha\hat{\mathbf{y}}$ con $0 < \alpha < 1/2$.

È facile intuire come questa scelta sia sempre possibile: infatti, poiché la superficie della sfera è colorata con due soli colori, sarà sempre possibile trovare su di essa due punti di diverso colore arbitrariamente vicini.

La dimostrazione procede poi secondo i seguenti 9 passi:

Passo 1. Poiché $\hat{\mathbf{z}}$ è verde e due vettori tra loro ortogonali non possono essere verdi, qualunque vettore nel piano xy deve essere rosso.

Passo 2. Dunque il vettore $\vec{\mathbf{c}} = \beta\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}$, dove β è un numero reale qualunque, deve essere rosso.

Passo 3. Poiché $\vec{\mathbf{a}}$ e $\hat{\mathbf{x}}$ sono rossi ed ortogonali, la normale al loro piano di appartenenza deve essere verde, pertanto ripetendo il ragionamento del Passo 1, segue che qualunque vettore appartenente al loro piano ax deve essere rosso, quindi deve essere rosso anche il vettore $\vec{\mathbf{d}} = \hat{\mathbf{x}}/\beta - \vec{\mathbf{a}}/\alpha$.

Passo 4. Ricordando che $\vec{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{z}} + \alpha\hat{\mathbf{y}}$, si dimostra facilmente che il vettore $\vec{\mathbf{d}}$ è ortogonale a $\vec{\mathbf{c}} = \beta\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}$.

Passo 5. Inoltre, essendo i vettori $\vec{\mathbf{c}}$ e $\vec{\mathbf{d}}$ ortogonali ed entrambi rossi, il vettore normale al loro piano è necessariamente verde e pertanto deve essere rosso anche il vettore $\vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{c}} + \vec{\mathbf{d}}$ appartenente al loro piano. In termini dei vettori di base, esplicitando le forme dei vettori $\vec{\mathbf{c}}$ e $\vec{\mathbf{d}}$, abbiamo $\vec{\mathbf{e}} = (\beta + 1/\beta)\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{z}}/\alpha$.

Passo 6. Poiché abbiamo scelto $\alpha < 1/2$ segue che $1/\alpha > 2$. Inoltre, per $\beta \in R$ abbiamo $2 \leq |\beta + 1/\beta| < \infty$. Pertanto è certamente possibile trovare un valore di β reale per cui $\vec{\mathbf{e}}$ punta nella direzione $\vec{\mathbf{f}} = \vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{z}}$ (basta imporre l'uguaglianza $\beta + 1/\beta = 1/\alpha$). Cambiando segno a β otteniamo un diverso vettore $\vec{\mathbf{e}}$ lungo la direzione $\vec{\mathbf{g}} = -\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{z}}$.

Passo 7. I vettori $\vec{\mathbf{f}}$ e $\vec{\mathbf{g}}$ devono entrambi essere rossi, essendo $\vec{\mathbf{e}}$ rosso per qualunque valore di β .

Passo 8. Poiché $\vec{\mathbf{f}}$ e $\vec{\mathbf{g}}$ sono ortogonali ed entrambi rossi, il vettore normale al loro piano deve essere verde, allora qualunque vettore appartenente al loro piano deve essere rosso.

Passo 9. Il vettore $\hat{\mathbf{z}}$ appartiene al piano di $\vec{\mathbf{f}}$ e $\vec{\mathbf{g}}$, infatti $\hat{\mathbf{z}} = -(\vec{\mathbf{f}} + \vec{\mathbf{g}})/2$, ma $\hat{\mathbf{z}}$ è di colore verde. Dunque abbiamo una contraddizione.

² Tuttavia seguiremo la notazione piú compatta introdotta da Mermin [Mermin 1993] e faremo uso dell'analogia tra i colori verde e rosso e i valori 1 e 0 che non compare nel lavoro originale di Bell.

Quindi una teoria a variabili nascoste che si propone di riprodurre i risultati della meccanica quantistica deve necessariamente essere contestuale: il valore assegnato ad un'osservabile A da tale teoria deve dipendere dalle osservabili congiuntamente misurate con A e perciò dalla completa specificazione dell'apparato sperimentale.

Come sottolineato da Bell, una misura della proposizione P_a insieme a P_{a_2} e P_{a_3} ottenuta con una misura dell'osservabile A , non necessariamente darà lo stesso esito quando misurata assieme a P_{b_2} e P_{b_3} attraverso la misura dell'osservabile B . Infatti A e B sono osservabili incompatibili e pertanto richiedono differenti disposizioni sperimentali per essere testate.

Il risultato di un'osservazione può ragionevolmente dipendere non solo dallo stato del sistema (incluso le variabili nascoste), ma anche dalla completa disposizione dell'apparato [Bell 1966].

Dunque l'interpretazione statistica è incompatibile con il formalismo quantistico: dato un sistema individuale, non è possibile assegnare valori simultaneamente definiti a tutte le sue osservabili in maniera indipendente da quel che viene misurato.

In anni recenti sono apparse in letteratura innumerevoli semplificazioni e generalizzazioni del teorema originale di Kochen e Specker. Ad esempio Peres [1991] ha dimostrato il teorema BKS con soli 33 vettori invece dei 117 di Kochen e Specker. Kernaghan ha dedotto una dimostrazione utilizzando 20 vettori per $n=4$ [Kernaghan 1994], ma la dimostrazione record col minimo numero di vettori si deve a Cabello, Estebarez e Alcaine, i quali si servono di soli 18 vettori quadridimensionali [Cabello et al. 1996]. Riportiamo la loro dimostrazione come esempio della metodologia comune seguita nella dimostrazione originale di Kochen e Specker e in tutta questa serie di lavori.

Sia $v(\mathbf{u})$ il valore di verità associato alla proposizione descritta dal proiettore $|\mathbf{u}\rangle\langle\mathbf{u}|$. Prendiamo in considerazione ogni possibile assegnazione di valori $v(\mathbf{u}) = 1, 0$ su ognuno dei nove insiemi di vettori ortogonali \mathbf{u} in R^4 dalle componenti indicate tra parentesi:

$$v(0, 0, 0, 1) + v(0, 0, 1, 0) + v(1, 1, 0, 0) + v(1, -1, 0, 0) = 1, \quad (6.10)$$

$$v(0, 0, 0, 1) + v(0, 1, 0, 0) + v(1, 0, 1, 0) + v(1, 0, -1, 0) = 1, \quad (6.11)$$

$$v(0, 0, 1, 0) + v(0, 1, 0, 0) + v(1, 0, 0, 1) + v(1, 0, 0, -1) = 1, \quad (6.12)$$

$$v(1, 1, -1, 1) + v(1, 1, 1, -1) + v(1, -1, 0, 0) + v(0, 0, 1, 1) = 1, \quad (6.13)$$

$$v(1, 1, -1, 1) + v(-1, 1, 1, 1) + v(1, 0, 1, 0) + v(0, 1, 0, -1) = 1, \quad (6.14)$$

$$v(1, 1, 1, -1) + v(-1, 1, 1, 1) + v(1, 0, 0, 1) + v(0, 1, -1, 0) = 1, \quad (6.15)$$

$$v(1, -1, 1, -1) + v(1, -1, -1, 1) + v(1, 1, 0, 0) + v(0, 0, 1, 1) = 1, \quad (6.16)$$

$$v(1, -1, 1, -1) + v(1, 1, 1, 1) + v(1, 0, -1, 0) + v(0, 1, 0, -1) = 1, \quad (6.17)$$

$$v(1, -1, -1, 1) + v(1, 1, 1, 1) + v(1, 0, 0, -1) + v(0, 1, -1, 0) = 1. \quad (6.18)$$

Notiamo come tra i 36 vettori, soltanto 18 siano differenti. È facile verificare che, per l'insieme delle proposizioni selezionate, nessuna possibile assegnazione di valori

soddisfa le richieste (a) e (b). Infatti sommando membro a membro le nove relazioni (6.10)-(6.18) la somma del lato destro dà un numero dispari, mentre la somma del lato sinistro, poiché ogni valore v appare in essa due volte, dà un numero pari. Dunque anche per $n = 4$ non esiste alcun modo consistente di fissare valori alle proprietà di un sistema fisico indipendentemente dalle osservabili simultaneamente misurate.

La formulazione del teorema per un numero arbitrario di dimensioni $n \geq 3$ dello spazio di Hilbert è stata provata da Cabello e Garcia Alcaine [1996]. Per costruire degli esempi fisici a cui applicare il teorema generalizzato è possibile identificare lo spazio di Hilbert n -dimensionale con lo spazio degli stati di una singola particella di spin $s = (n - 1)/2$.

A Mermin [1993] ed a Peres [1991] si deve un'ulteriore formulazione del teorema, totalmente algebrica e dall'immediata dimostrazione.

Consideriamo un insieme di sistemi identicamente preparati in un dato stato. Una teoria a variabili nascoste, o un'interpretazione realista, assegna per ogni osservabile A, L, M, \dots , e per ciascuno dei sistemi dell'insieme, un valore numerico $v(A), v(L), v(M), \dots$ in modo che, se un'osservabile o un sottoinsieme di osservabili tra loro commutanti sono misurati, i risultati dell'osservazione saranno i valori assegnati. Come richiesto dalla meccanica quantistica, tali risultati non potranno che identificarsi con gli autovalori delle osservabili.

Allora, se vale per un'insieme di operatori commutanti l'identità

$$f(A, L, M, \dots) = 0, \quad (6.19a)$$

tale identità deve valere anche per i valori assegnati, cioè i risultati di una misurazione su di un qualunque stato del sistema devono sottostare anch'essi ad un'identità della stessa forma:

$$f(v(A), v(L), v(M), \dots) = 0, \quad (6.19b)$$

essendo $v(A), v(L), v(M), \dots$ gli autovalori del simultaneo autostato di A, L, M, \dots

La condizione di non contestualità può ora esprimersi in questa maniera: consideriamo una nuova identità operatoriale per un diverso insieme di osservabili commutanti A, L', M', \dots non tutte compatibili con le osservabili dell'insieme A, L, M, \dots :

$$g(A, L', M', \dots) = 0, \quad (6.20a)$$

e la corrispondente identità per i valori

$$g(v(A), v(L'), v(M'), \dots) = 0. \quad (6.20b)$$

I valori delle osservabili comuni che compaiono nella (6.20b) e nella (6.19b) devono considerarsi identici. Ad esempio, il valore $v(A)$ dell'osservabile A misurato nella (6.20b) assieme alle osservabili L', M', \dots deve essere identico al valore della stessa osservabile misurata assieme a L, M, \dots nella (6.19b).

Peres, nella sua semplificazione del teorema BKS per 4 dimensioni, considera una coppia di particelle di spin 1/2 nello speciale stato di singoletto. Per tale coppia egli introduce i sei operatori:

$$\sigma_x^1 \sigma_y^2, \quad \sigma_y^1 \sigma_x^2, \quad \sigma_x^1, \quad \sigma_x^2, \quad \sigma_y^1, \quad \sigma_y^2,$$

a cui assegna, secondo l'ipotesi di realismo, un ben definito valore $v = \pm 1$. Per lo stato di singoletto, ogni assegnazione deve soddisfare le condizioni:

$$v(\sigma_x^1) = -v(\sigma_x^2), \quad v(\sigma_y^1) = -v(\sigma_y^2), \quad v(\sigma_z^1) = -v(\sigma_z^2). \quad (6.21)$$

Gli operatori σ_x^1 e σ_y^2 , riferendosi a particelle distinte, commutano, così come gli operatori σ_y^1 e σ_x^2 , dunque per le condizioni (6.19a) e (6.19b) sulle identità operatoriali³, abbiamo:

$$v(\sigma_x^1 \sigma_y^2) = v(\sigma_x^1) v(\sigma_y^2), \quad v(\sigma_y^1 \sigma_x^2) = v(\sigma_y^1) v(\sigma_x^2). \quad (6.22)$$

Moltiplicando membro a membro le equazioni (6.22), per le (6.21), si ha:

$$v(\sigma_x^1 \sigma_y^2) v(\sigma_y^1 \sigma_x^2) = v(\sigma_x^1) v(\sigma_y^2) v(\sigma_y^1) v(\sigma_x^2) = 1. \quad (6.23)$$

Gli operatori $\sigma_x^1 \sigma_y^2$ e $\sigma_y^1 \sigma_x^2$ commutano tra loro e con il loro prodotto⁴

$$\sigma_x^1 \sigma_y^2 \sigma_y^1 \sigma_x^2 = \sigma_z^1 \sigma_z^2, \quad (6.24)$$

pertanto:

$$\begin{aligned} v(\sigma_x^1 \sigma_y^2 \sigma_y^1 \sigma_x^2) &= v(\sigma_x^1 \sigma_y^2) v(\sigma_y^1 \sigma_x^2), \\ v(\sigma_x^1 \sigma_y^2 \sigma_y^1 \sigma_x^2) &= v(\sigma_z^1 \sigma_z^2). \end{aligned} \quad (6.25)$$

Ma per la condizione di singoletto:

$$v(\sigma_z^1 \sigma_z^2) = v(\sigma_z^1) v(\sigma_z^2) = -1, \quad (6.26)$$

e questa porta con le (6.23) e (6.25) alla contraddizione algebrica:

$$\begin{aligned} v(\sigma_x^1 \sigma_y^2 \sigma_y^1 \sigma_x^2) &= v(\sigma_x^1 \sigma_y^2) v(\sigma_y^1 \sigma_x^2) = v(\sigma_x^1) v(\sigma_y^2) v(\sigma_y^1) v(\sigma_x^2) = +1 \\ v(\sigma_x^1 \sigma_y^2 \sigma_y^1 \sigma_x^2) &= v(\sigma_z^1 \sigma_z^2) = v(\sigma_z^1) v(\sigma_z^2) = -1. \end{aligned}$$

Ancora una volta questo dimostra come sia impossibile per un sistema individuale assegnare un valore ad ogni osservabile di un insieme di operatori prima della misura, quando non tutte le osservabili dell'insieme commutano.

³ Ad esempio, per la prima della (6.22) si è utilizzata l'identità operatoriale $C - AB = 0$, dove $C = \sigma_x^1 \sigma_y^2$, $A = \sigma_x^1$, e $B = \sigma_y^2$, commutano, per cui $v(C) - v(A)v(B) = 0$.

⁴ Ricordiamo le relazioni tra le matrici di Pauli $\sigma_x^i \sigma_y^i + \sigma_y^i \sigma_x^i = 0$, $\sigma_x^i \sigma_y^i - \sigma_y^i \sigma_x^i = 2i\sigma_z^i$, per le quali $\sigma_x^i \sigma_y^i = i\sigma_z^i$ e $\sigma_y^i \sigma_x^i = -i\sigma_z^i$.

La dimostrazione di Peres si avvale dello speciale stato di singoletto, mentre la versione originale del teorema BKS era indipendente dal particolare stato del sistema.

Mermin ha lievemente modificato la trattazione di Peres con lo scopo di rendere anch'essa indipendente dallo stato. Egli introduce il seguente insieme di 9 operatori:

$$\begin{array}{ccc} \sigma_x^1 & \sigma_x^2 & \sigma_x^1 \sigma_x^2 \\ \sigma_y^2 & \sigma_y^1 & \sigma_y^2 \sigma_y^1 \\ \sigma_x^1 \sigma_y^2 & \sigma_x^2 \sigma_y^1 & \sigma_z^1 \sigma_z^2 \end{array} \quad (6.27)$$

Le osservabili presenti in ognuna delle tre righe e delle tre colonne sono tra loro commutanti. Assegnando dei valori ± 1 alle osservabili, per i prodotti lungo le tre righe della (6.27) abbiamo:

$$\begin{aligned} v(\sigma_x^1)v(\sigma_x^2)v(\sigma_x^1 \sigma_x^2) &= 1, \\ v(\sigma_y^1)v(\sigma_y^2)v(\sigma_y^1 \sigma_y^2) &= 1, \\ v(\sigma_x^1 \sigma_y^2)v(\sigma_x^2 \sigma_y^1)v(\sigma_z^1 \sigma_z^2) &= 1, \end{aligned} \quad (6.28)$$

mentre per i prodotti dei valori in colonna otteniamo:

$$\begin{aligned} v(\sigma_x^1)v(\sigma_y^2)v(\sigma_x^1 \sigma_y^2) &= 1, \\ v(\sigma_x^2)v(\sigma_y^1)v(\sigma_x^2 \sigma_y^1) &= 1, \\ v(\sigma_x^1 \sigma_x^2)v(\sigma_y^1 \sigma_y^2)v(\sigma_z^1 \sigma_z^2) &= -1. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Ma nelle (6.28) e (6.29) ogni valore v compare due volte, dunque il prodotto di tutti i loro membri di sinistra è pari a $+1$, mentre il prodotto di tutti i loro membri di destra vale -1 . Dunque abbiamo nuovamente una contraddizione.

6.3 Non località senza disuguaglianze e contestualità

Consideriamo un sistema composto da diverse parti tra loro distanti e immaginiamo che su ognuna di esse venga misurata una delle diverse osservabili commutanti appartenenti all'insieme $\{A, L, M, \dots\}$. Assumiamo che le misure vengano eseguite simultaneamente e con dispositivi separati ed indipendenti.

Introduciamo quindi un altro insieme di possibili misurazioni spazialmente separate $\{A, P, Q, \dots\}$, dove non tutte le nuove osservabili commutano con quelle della famiglia precedente. Supponiamo che la misura delle nuove osservabili necessiti di un cambiamento dell'apparato sperimentale relativo ai dispositivi misuranti $\{L, M, \dots\}$ che non riguardi lo strumento di misura associato ad A .

In questa situazione, se assumiamo valida l'ipotesi di località, è plausibile ritenere che i cambiamenti dell'apparato non abbiano alcuna ripercussione sui possibili risultati della misura di A e che quindi il valore $v(A)$, conseguito con una misura di tale osservabile, sia indipendente da ciò che viene misurato su altre parti del sistema. In definitiva, possiamo assumere che, almeno in condizioni simili a quella appena descritta, la richiesta di non contestualità segua dalla condizione di località:

Condizione di località \Rightarrow Condizione di non contestualità

Allora risulta possibile dedurre dei teoremi del tipo BKS sostituendo l'ipotesi di non contestualità con quella di località.

Una prima investigazione sul legame esistente tra non località e contestualità si deve a Heywood e Redhead [1983]. Essi sono stati anche i primi a dedurre un teorema di Bell senza disuguaglianze attraverso il contemporaneo utilizzo del ragionamento EPR e del teorema BKS. Riassumiamo brevemente il loro lavoro.

Heywood e Redhead prendono in considerazione una coppia di sistemi di spin 1 con momento angolare totale nullo. Applicando il criterio di realtà e l'ipotesi di località, con un'argomentazione del tutto analoga a quella escogitata da Bohm nella sua versione del paradosso EPR per lo spin 1/2, gli autori deducono facilmente che le componenti dello spin lungo una qualsiasi direzione devono essere elementi di realtà del sistema. Dunque i valori $v = +1, 0$ e -1 , (in unità \hbar) devono essere pre-determinati prima dell'osservazione. Di conseguenza saranno associati ad elementi di realtà anche i valori dei quadrati delle componenti $+1$ e 0 . Come nell'esempio del paragrafo 6.2, gli autori introducono poi gli operatori commutanti $S_{\vec{u}}^2, S_{\vec{v}}^2, S_{\vec{w}}^2$, dove $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, sono tre direzioni generiche ortogonali. Tali operatori sono simultaneamente misurabili, e secondo la teoria quantistica, i loro valori devono essere tali da soddisfare la condizione (6.8): $v(S_{\vec{u}}^2) + v(S_{\vec{v}}^2) + v(S_{\vec{w}}^2) = 2$.

Ma, come dimostrato dal teorema BKS, è impossibile per l'insieme di tutte le possibili terne ortogonali $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ verificare congiuntamente tale vincolo.

Pertanto la meccanica quantistica non rispetta la condizione di non contestualità. Ma poiché tale condizione segue necessariamente dall'ipotesi di località, il teorema di Heywood e Redhead dimostra anche la non località: dunque la teoria quantistica è allo stesso tempo sia contestuale che non locale.

Analizziamo ora la versione di Peres del teorema BKS per 2 particelle di spin $1/2$ nello stato di singoletto. In essa venivano introdotte le osservabili commutanti $\sigma_x^1 \sigma_y^2$ e $\sigma_y^1 \sigma_x^2$ e nelle identità operatoriali risultava corretto assegnare ad esse simultaneamente degli autovalori. Ma per poter misurare congiuntamente tali osservabili si rendono necessari apparati di misura “non locali”, cioè apparati le cui parti sono tra loro interagenti e attraverso le quali alle particelle è permesso interagire tra loro.

In tal caso l'impossibilità di teorie non contestuali non ci dà alcuna informazione sull'esistenza o meno di teorie locali. Invece le cose cambiano per sistemi composti da più di due particelle.

Seguendo l'esempio di Greenberger, Horne, Shimony e Zeilinger [1990] Mermin considera un sistema di tre particelle indipendenti di spin $1/2$ nello spazio di Hilbert a otto dimensioni. Egli introduce poi le 10 osservabili indicate nello schema della figura 6.1. Esse sono disposte lungo le braccia di una stella a 5 punte. In ognuna delle braccia sono situati gruppi di 4 osservabili commutanti ciascuna delle quali è condivisa da 2 gruppi.

Si mostra immediatamente come sia impossibile assegnare ad ogni osservabile dei valori ± 1 in modo da soddisfare le identità operatoriali e facendo sí che il valore attribuito ad esse sia indipendente dal gruppo di osservabili a cui appartiene.

Infatti, dalle relazioni tra gli operatori, abbiamo che il prodotto dei valori in ognuno dei gruppi deve essere pari a $+1$:

$$v(\sigma_x^1 \sigma_x^2 \sigma_x^3) v(\sigma_x^3) v(\sigma_x^1) v(\sigma_x^2) = 1, \quad (6.30)$$

$$v(\sigma_x^2) v(\sigma_y^3) v(\sigma_y^1 \sigma_x^2 \sigma_y^3) v(\sigma_x^1) = 1, \quad (6.31)$$

$$v(\sigma_y^1) v(\sigma_y^1 \sigma_y^2 \sigma_x^3) v(\sigma_x^3) v(\sigma_y^2) = 1, \quad (6.32)$$

$$v(\sigma_y^2) v(\sigma_x^1) v(\sigma_y^3) v(\sigma_x^1 \sigma_y^2 \sigma_y^3) = 1. \quad (6.33)$$

Escluso il prodotto dei valori lungo il braccio orizzontale della stella, il quale, per l'identità operatoriale $\sigma_x^1 \sigma_x^2 \sigma_x^3 = -(\sigma_y^1 \sigma_y^2 \sigma_x^3)(\sigma_y^1 \sigma_x^2 \sigma_y^3)(\sigma_x^1 \sigma_y^2 \sigma_y^3)$, ricordando che $\sigma_i^2 = I$, deve essere pari a -1 :

$$v(\sigma_x^1 \sigma_y^2 \sigma_y^3) v(\sigma_y^1 \sigma_x^2 \sigma_y^3) v(\sigma_y^1 \sigma_y^2 \sigma_x^3) v(\sigma_x^1 \sigma_x^2 \sigma_x^3) = -1. \quad (6.34)$$

Ma se eseguiamo il prodotto delle (6.30)-(6.34) membro a membro, otteniamo come al solito la contraddizione algebrica $+1 = -1$.

Il teorema d'impossibilità BKS appena dimostrato per la non contestualità si traduce facilmente in un notevole e semplice teorema d'impossibilità delle teorie locali senza disuguaglianze. Consideriamo per le 3 particelle separate il seguente stato entangled dello spin:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z+\rangle_1 |z+\rangle_2 |z+\rangle_3 - |z-\rangle_1 |z-\rangle_2 |z-\rangle_3). \quad (6.35)$$

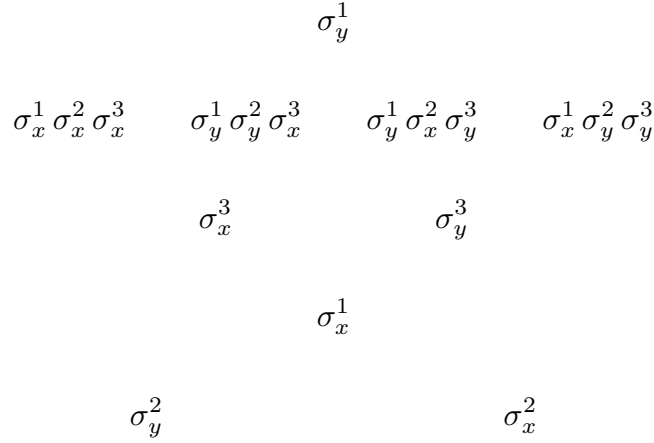


Figura 6.1 Dieci osservabili sono disposte lungo le linee di una stella. Tutte le osservabili che appartengono a ciascuna linea commutano tra loro e ogni osservabile è comune a due linee.

Il ket (6.35) è denominato in letteratura stato GHZ, dalle iniziali degli autori Greenberger, Horne e Zeilinger [1989] ai quali si deve questa nuova versione del teorema di Bell senza disuguaglianze.

Si considerino nuovamente le osservabili :

$$S_\alpha = \sigma_x^1 \sigma_y^2 \sigma_y^3, \quad S_\beta = \sigma_y^1 \sigma_x^2 \sigma_y^3, \quad S_\gamma = \sigma_y^1 \sigma_y^2 \sigma_x^3. \quad (6.36)$$

È facile verificare con un calcolo diretto che gli operatori S_α , S_β e S_γ , soddisfano rispettivamente le equazioni agli autovalori:

$$S_\alpha |\psi\rangle = +|\psi\rangle, \quad S_\beta |\psi\rangle = +|\psi\rangle, \quad S_\gamma |\psi\rangle = +|\psi\rangle, \quad (6.37)$$

e dunque che $|\psi\rangle$ risulta essere un autostato per le osservabili (6.36).

Pertanto, dalle (6.37) segue che risulta possibile prevedere con certezza, ad esempio, il valore dell'osservabile σ_x di ognuna delle particelle misurando i valori delle componenti y dello spin per le altre due. Naturalmente un ragionamento analogo può applicarsi anche per il valore di σ_y .

Dunque, adoperando il criterio di realtà di Einstein, si deduce che le componenti x ed y dello spin di ognuna delle tre particelle devono essere elementi di realtà e che quindi ad esse è possibile attribuire congiuntamente i valori ± 1 . La condizione di località ci assicura che ciascun valore dello spin assegnato ad ogni particella è indipendente dalla natura delle osservazioni che si decidono di eseguire sulle altre. In questo caso, l'ipotesi di non contestualità dei valori è giustificata dalla condizione di località. Dunque, per le (6.37) i valori assegnati alle osservabili di spin devono sottostare alle equazioni:

$$v(\sigma_x^1) v(\sigma_y^2) v(\sigma_y^3) = +1, \quad (6.38a)$$

$$v(\sigma_y^1) v(\sigma_x^2) v(\sigma_y^3) = +1, \quad (6.38b)$$

$$v(\sigma_y^1) v(\sigma_y^2) v(\sigma_x^3) = +1. \quad (6.38c)$$

Ricordando che $v = \pm 1$, moltiplicando membro a membro le (6.38) otteniamo immediatamente la condizione:

$$v(\sigma_x^1) v(\sigma_x^2) v(\sigma_x^3) = +1. \quad (6.39)$$

Ma lo stato $|\psi\rangle$ (6.35) è anche autostato dell'osservabile $\sigma_x^1 \sigma_x^2 \sigma_x^3$ con autovalore -1 :

$$\sigma_x^1 \sigma_x^2 \sigma_x^3 |\psi\rangle = -|\psi\rangle. \quad (6.40)$$

Pertanto secondo il formalismo quantistico deve essere:

$$v(\sigma_x^1) v(\sigma_x^2) v(\sigma_x^3) = -1, \quad (6.41)$$

e confrontando la (6.41) con la (6.39) riotteniamo la consueta contraddizione algebrica. L'importanza di questa nuova versione del teorema di Bell risiede nel fatto che la dimostrazione della contraddittorietà tra formalismo quantistico e interpretazione realista e locale è conseguita senza l'uso di ragionamenti probabilistici e di disuguaglianze, apparendo così più vicina allo spirito originale del lavoro di EPR.

Si noti come le quattro osservabili $\sigma_x^1 \sigma_y^2 \sigma_y^3$, $\sigma_y^1 \sigma_x^2 \sigma_y^3$, $\sigma_y^1 \sigma_y^2 \sigma_x^3$ e $\sigma_x^1 \sigma_x^2 \sigma_x^3$ siano tra loro commutanti, questo permette di scegliere un autostato comune a cui applicare il ragionamento di GHZ. Ciò non è possibile per l'estensione di Mermin dell'argomentazione di Peres, infatti in essa le osservabili utilizzate $\sigma_x^1 \sigma_x^2$, $\sigma_y^1 \sigma_y^2$, $\sigma_x^1 \sigma_y^2$ e $\sigma_y^1 \sigma_x^2$ non sono mutuamente commutabili.

Come per l'esempio utilizzato da Bell, è possibile sviluppare una variante di questa dimostrazione relativa all'osservabile impulso⁵.

Si consideri infatti lo schema sperimentale a 3 fotoni della figura 6.2b. Supponiamo che i quanti siano prodotti nello stato di sovrapposizione

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a\rangle_1 |b\rangle_2 |c\rangle_3 + |a'\rangle_1 |b'\rangle_2 |c'\rangle_3), \quad (6.42)$$

dove i due stati che compongono la (6.42) rappresentano approssimativamente gli autostati dell'impulso delle particelle diretti rispettivamente lungo a , b , c oppure lungo a' , b' , c' . Tre lamine poste sui cammini a' , b' e c' causano le variazioni di fase ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 controllabili dagli sperimentatori. I fasci dopo aver percorso i cammini vengono fatti incrociare in tre beam-splitters e in seguito vengono raccolti da rivelatori di particelle posti in d , d' , e , e' , f , f' .

⁵ In realtà la prima versione del teorema di Bell senza disuguaglianze per lo spin 1/2 richiedeva 4 particelle [Greenberger et al. 1989]. Poco dopo gli stessi autori assieme a Shimony ne diedero una versione con 3 sole particelle per l'operatore impulso [Greenberger et al. 1990]. Questa a sua volta è stata immediatamente estesa da Mermin all'osservabile di spin [Mermin 1990].

Introduciamo per la particella 1 la variabile dicotomica A , a cui associamo il valore $+1$ se il fotone arriva in d e -1 se arriva in d' , in modo analogo definiamo anche per la particella 2 (3) la variabile dicotomica B (C), a cui assegnamo il valore $+1$ o -1 a seconda che arrivi rispettivamente in e o f (e' o f').

Assumendo per i divisori di fascio il coefficiente di riflessione identico al coefficiente di trasmissione, un calcolo diretto mostra come la probabilità P_ψ , per cui il prodotto delle variabili ABC è pari a ± 1 , risulta essere:

$$P_\psi(ABC = \pm 1 | \phi_1, \phi_2, \phi_3) = \frac{1}{2} [1 \pm \sin(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3)]. \quad (6.43)$$

La (6.43) ha il tipico andamento oscillante in funzione degli shifts di fase caratteristico dei fenomeni d'interferenza, per tale motivo, in analogia con quanto stabilito nel paragrafo 5.1 per due particelle, la correlazione esistente tra i tre fotoni è denominata interferenza a tre particelle. Dalla probabilità (6.43) si deducono immediatamente i seguenti casi speciali:

$$P_\psi(ABC = +1 | \phi_1, \phi_2, \phi_3) = \begin{cases} 1, & \text{se } \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = \pi/2 \pmod{2\pi}; \\ 0, & \text{se } \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 3\pi/2 \pmod{2\pi}; \end{cases} \quad (6.44)$$

$$P_\psi(ABC = -1 | \phi_1, \phi_2, \phi_3) = \begin{cases} 0, & \text{se } \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = \pi/2 \pmod{2\pi}; \\ 1, & \text{se } \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 3\pi/2 \pmod{2\pi}. \end{cases} \quad (6.45)$$

La possibilità di alcuni eventi di verificarsi con probabilità 1, e dunque con certezza, permette di applicare anche a questo schema il ragionamento alla EPR. Allora accettare il criterio di realtà e il principio di località di Einstein implica che il comportamento di un fotone deve dipendere solo dalla fase relativa al possibile cammino intrapreso da quel fotone, per cui, ad esempio, il valore di A deve essere funzione della fase ϕ_1 ma non di ϕ_2 e ϕ_3 . Inoltre si deve supporre che l'esito di ogni singolo evento A , B , C , sia completamente determinato dall'esistenza di variabili nascoste λ il cui valore è fissato alla sorgente comune delle particelle. In definitiva si assume che per ogni singolo evento: $A = A_\lambda(\phi_1)$, $B = B_\lambda(\phi_2)$, $C = C_\lambda(\phi_3)$.

Dalle (6.44) e (6.45) si deduce che, se il modello a variabili nascoste locale e non contestuale deve riprodurre ogni previsione della teoria quantistica, esso deve anche soddisfare le due relazioni:

$$A_\lambda(\phi_1)B_\lambda(\phi_2)C_\lambda(\phi_3) = +1 \quad \text{per } \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = \pi/2 \pmod{2\pi}, \quad (6.46a)$$

$$A_\lambda(\phi_1)B_\lambda(\phi_2)C_\lambda(\phi_3) = -1 \quad \text{per } \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 3\pi/2 \pmod{2\pi}. \quad (6.46b)$$

In particolare dalla (6.46a) segue che deve necessariamente essere:

Figura 6.2 Schema degli apparati sperimentali proposti per la verifica delle correlazioni quantistiche misurate sugli stati GHZ. Nella figura *a*) tre particelle vengono emesse in uno stato GHZ dello spin $1/2$. Nella figura *b*) tre particelle sono invece preparate in uno stato GHZ del momento.

$$A_\lambda(\pi/2)B_\lambda(0)C_\lambda(0) = +1, \quad (6.47a)$$

$$A_\lambda(0)B_\lambda(\pi/2)C_\lambda(0) = +1, \quad (6.47b)$$

$$A_\lambda(0)B_\lambda(0)C_\lambda(\pi/2) = +1. \quad (6.47c)$$

Moltiplicando membro a membro le (6.47) otteniamo:

$$A_\lambda(\pi/2)B_\lambda(\pi/2)C_\lambda(\pi/2) = +1. \quad (6.48)$$

Ma la (6.48) è in contraddizione con la (6.46b), per la quale se $\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 3\pi/2$ deve essere $ABC = -1$. Pertanto il teorema risulta dimostrato anche per le osservabili impulso.

Riportiamo infine che la costruzione di uno stato GHZ della polarizzazione per tre fotoni è stata effettivamente realizzata e che le correlazioni misurate corrispondono alle previsioni quantistiche [Bouwmeester et al. 1999].

6.4 Contestualità e non località nelle disuguaglianze di Bell

In questo paragrafo è nostra intenzione analizzare la relazione esistente tra i concetti di contestualità e non località all'interno della formulazione originale del teorema di Bell.

Il ruolo giocato nella teoria quantistica da questi due concetti risulta maggiormente chiaro qualora si segua nella deduzione delle disuguaglianze la semplice argomentazione immaginata da Eberhard [1977]. Quest'autore ha ricavato una disuguaglianza di Bell (del tipo CHSH) dal principio di località sia evitando l'ipotesi

di determinismo che l'uso diretto delle variabili nascoste. Noi, per evidenziare la stretta parentela tra il teorema di Bell e il teorema BKS, daremo una versione lievemente modificata del lavoro di Eberhard; esso sarà sviluppato seguendo le argomentazioni di Peres e Mermin e facendo esplicito riferimento all'ipotesi di non contestualità.

Si prenda come di consueto la coppia di particelle 1 e 2 di spin 1/2 sulle quali apparati di misurazione A e B eseguono osservazioni spazialmente separate. I dispositivi A e B, aventi parametri controllabili dagli sperimentatori, permettono rispettivamente la misura delle osservabili dicotomiche

$$\sigma_a^1, \quad \sigma_{a'}^1, \quad \sigma_b^2, \quad \sigma_{b'}^2, \quad (6.81)$$

dove σ_a^1 e $\sigma_{a'}^1$, così come σ_b^2 e $\sigma_{b'}^2$, sono osservabili incompatibili e perciò non simultaneamente misurabili. Possiamo immaginare quattro possibili esperimenti ognuno dei quali consistente nel registrare un numero N elevato di eventi di misurazione di una delle quattro possibili coppie di osservabili

$$\sigma_a^1\sigma_b^2, \quad \sigma_a^1\sigma_{b'}^2, \quad \sigma_{a'}^1\sigma_b^2, \quad \sigma_{a'}^1\sigma_{b'}^2. \quad (6.82)$$

Supponiamo ora valido il principio di località. Si consideri come evento una misura dei valori della coppia di osservabili $\sigma_a^1\sigma_b^2$ da cui si ottiene il prodotto degli autovalori $v(\sigma_a^1)v(\sigma_b^2)$. Se gli eventi corrispondenti all'osservazione sono spazialmente separati, per il principio di località una misurazione sulla particella 2 non può avere alcuna influenza sui risultati conseguibili da una osservazione delle proprietà della particella 1. Segue che per l'osservabile σ_a^1 non fa alcuna differenza venire misurata assieme a σ_b^2 oppure a $\sigma_{b'}^2$.

È chiaro come in questo caso l'assunzione di località equivalga all'ipotesi di non contestualità: il valore $v(\sigma_a^1)$ accoppiato al valore $v(\sigma_b^2)$ deve essere identico al valore che si avrebbe se la coppia di osservabili misurate fosse $\sigma_a^1\sigma_{b'}^2$.

Per l'ipotesi di realismo, un valore ben definito ± 1 può essere assegnato prima dell'atto dell'osservazione ad ognuna delle osservabili (6.81):

$$v(\sigma_a^1), \quad v(\sigma_{a'}^1), \quad v(\sigma_b^2), \quad v(\sigma_{b'}^2), \quad (6.83)$$

e pertanto alle coppie (6.82):

$$v(\sigma_a^1)v(\sigma_b^2), \quad v(\sigma_a^1)v(\sigma_{b'}^2), \quad v(\sigma_{a'}^1)v(\sigma_b^2), \quad v(\sigma_{a'}^1)v(\sigma_{b'}^2), \quad (6.84)$$

dove, per l'ipotesi di località o non contestualità, i valori di σ_a^1 che compaiono nella prima e nella seconda coppia devono assumersi identici, pur essendo misurati assieme alle osservabili non compatibili σ_b^2 e $\sigma_{b'}^2$. Un discorso analogo si applica naturalmente ad ogni altro valore nella (6.84).

Per ognuno degli N eventi sperimentali supponiamo quindi predeterminato il valore della grandezza:

$$v_i(\sigma_a^1)v_i(\sigma_b^2) + v_i(\sigma_{a'}^1)v_i(\sigma_b^2) + v_i(\sigma_a^1)v_i(\sigma_{b'}^2) - v_i(\sigma_{a'}^1)v_i(\sigma_{b'}^2), \quad (6.85)$$

dove $i = 1 \cdots N$. La (6.85) può scriversi anche nella forma equivalente:

$$[v_i(\sigma_a^1) + v_i(\sigma_{a'}^1)]v_i(\sigma_b^2) + [v_i(\sigma_a^1) - v_i(\sigma_{a'}^1)]v_i(\sigma_{b'}^2). \quad (6.86)$$

Associando alle (6.83) ogni possibile valore $v = \pm 1$, dalla (6.86) si evince facilmente che per la (6.85) vale la disuguaglianza:

$$v_i(\sigma_a^1)v_i(\sigma_b^2) + v_i(\sigma_{a'}^1)v_i(\sigma_b^2) + v_i(\sigma_a^1)v_i(\sigma_{b'}^2) - v_i(\sigma_{a'}^1)v_i(\sigma_{b'}^2) \leq 2. \quad (6.87)$$

Ma non tutti i valori (6.83) sono simultaneamente misurabili, essendo non commutanti le osservabili (6.81) relative ad una stessa particella. A ciò si può ovviare definendo per ognuno dei quattro esperimenti possibili $\alpha = a, a', \beta = b, b'$ la funzione di correlazione

$$E(\sigma_\alpha^1, \sigma_\beta^2) = \sum_{i=1}^N v_i(\sigma_\alpha^1)v_i(\sigma_\beta^2)/N. \quad (6.88)$$

Dalla (6.87) segue allora che per i valori medi vale una disuguaglianza di tipo CHSH:

$$E(v_i(\sigma_a^1)(v_i(\sigma_b^2))) + E(v_i(\sigma_{a'}^1)(v_i(\sigma_b^2))) + E(v_i(\sigma_a^1)v_i(\sigma_{b'}^2)) - E(v_i(\sigma_{a'}^1)v_i(\sigma_{b'}^2)) \leq 2,$$

che risulta violata, come più volte verificato, dalle predizioni della teoria quantistica.

L'argomentazione appena svolta può essere applicata anche al caso di perfetta anticorrelazione, qualora la coppia venga preparata nello stato di singoletto. In questo caso si ottiene immediatamente l'originale disuguaglianza di Bell. Introduciamo infatti le osservabili

$$\sigma_a^1, \quad \sigma_b^1, \quad \sigma_a^2, \quad \sigma_b^2, \quad \sigma_c^2, \quad (6.89)$$

a cui associare, per l'ipotesi di realismo, i valori predeterminati ± 1 :

$$v(\sigma_a^1), \quad v(\sigma_b^1), \quad v(\sigma_a^2), \quad v(\sigma_b^2), \quad v(\sigma_c^2). \quad (6.90)$$

Per la proprietà di anticorrelazione dello stato di singoletto richiederemo che siano soddisfatte le condizioni:

$$v(\sigma_a^1) = -v(\sigma_a^2), \quad v(\sigma_b^1) = -v(\sigma_b^2). \quad (6.91)$$

Procedendo in maniera analoga alla trattazione precedente, immaginiamo di poter eseguire tre possibili esperimenti ognuno dei quali consistente nel registrare un numero N elevato di eventi di misurazione di una delle tre possibili coppie di osservabili

$$\sigma_a^1 \sigma_b^2, \quad \sigma_a^1 \sigma_c^2, \quad \sigma_b^1 \sigma_c^2, \quad (6.92)$$

i cui valori predeterminati sono fissati dalla (6.90):

$$v(\sigma_a^1)v(\sigma_b^2), \quad v(\sigma_a^1)v(\sigma_c^2), \quad v(\sigma_b^1)v(\sigma_c^2), \quad (6.93)$$

e come nel caso precedente, per il principio di località deve valere anche la condizione di non contestualità. Per cui i valori di σ_a^1 che compaiono nella prima e nella seconda coppia devono considerarsi identici, anche se misurati assieme alle osservabili non compatibili σ_b^2 e σ_c^2 . Un ragionamento simile vale di conseguenza anche per i valori di σ_c^2 . Consideriamo adesso la differenza:

$$v(\sigma_a^1)v(\sigma_b^2) - v(\sigma_a^1)v(\sigma_c^2). \quad (6.94)$$

Moltiplicando la (6.94) per $v(\sigma_a^1)v(\sigma_b^2)$, e ricordando che $v = \pm 1$ e $v^2 = 1$, otteniamo:

$$\begin{aligned} v(\sigma_a^1)v(\sigma_b^2)[v(\sigma_a^1)v(\sigma_b^2) - v(\sigma_a^1)v(\sigma_c^2)] &= 1 - v(\sigma_b^2)v(\sigma_c^2) \\ &= 1 + v(\sigma_b^1)v(\sigma_c^2), \end{aligned} \quad (6.95)$$

dove per ottenere la seconda equazione abbiamo fatto uso della seconda delle condizioni (6.91). Poiché $v(\sigma_a^1)v(\sigma_b^2) = \pm 1$ e il secondo membro della (6.95) è non negativo, segue dall'equazione precedente che

$$|v(\sigma_a^1)v(\sigma_b^2) - v(\sigma_a^1)v(\sigma_c^2)| = 1 + v(\sigma_b^1)v(\sigma_c^2), \quad (6.96)$$

dalla quale si deduce immediatamente la condizione

$$-1 - v_i(\sigma_b^1)v_i(\sigma_c^2) \leq v_i(\sigma_a^1)v_i(\sigma_b^2) - v_i(\sigma_a^1)v_i(\sigma_c^2) \leq 1 + v_i(\sigma_b^1)v_i(\sigma_c^2). \quad (6.97)$$

La (6.97) deve essere valida per ogni evento dell'insieme N . Essa tuttavia non risulta sperimentalmente verificabile in maniera diretta, essendo infatti impossibile simultaneamente misurare i valori delle osservabili non commutanti che vi compaiono. Tuttavia è possibile ottenere dalla (6.97) una relazione testabile passando ai valori medi definiti nella (6.88). Per essi, con la condizione (6.97), ricaviamo immediatamente la prima delle disuguaglianze di Bell:

$$|E(v(\sigma_a^1)v(\sigma_b^2)) - E(v(\sigma_a^1)v(\sigma_c^2))| \leq 1 + E(v(\sigma_b^2)v(\sigma_c^2)).$$

Bibliografia

- Accardi L., 1997. *Urne e camaleonti. Dialogo sulla realtà, le leggi del caso e l'interpretazione della teoria quantistica*, Il Saggiatore, Milano.
- Aerts D., 1982. "Example of a Macroscopical Classical Situation That Violates Bell Inequalities", *Lett. Nuovo Cimento*, **34** pp. 107-111.
- Afriat A., Selleri F., 1999. *The Einstein, Podolsky and Rosen Paradox*, Plenum Press, New York and London.
- Aharonov Y., Albert D. Z., Vaidman L., 1986. "Measurement process in relativistic quantum theory", *Phys. Rev. D*, **34** pp. 1805-1813.
- Ardehali M., 1993. "Experimental consequences of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm-Bell gedanken experiment", *Phys. Rev. A*, **47** pp. 1633-1638.
- Ardehali M., 1994. "Optical test of local hidden-variable theories with two-channel polarizers", *Phys. Rev. A*, **49** pp. 3143-3146.
- Aspect A., 1976. "Proposed experiment to test nonseparability of quantum mechanics", *Phys. Rev. D*, **14** pp. 1944-1951.
- Aspect A., 1999. "Bell's inequality test: more ideal than ever", *Nature*, **398** pp. 189-190.
- Aspect A., Dalibard J., Roger G., 1982. "Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers", *Phys. Rev. Lett.*, **49** pp. 1804-1807.
- Aspect A., Grangier P., Roger G., 1981. "Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem", *Phys. Rev. Lett.*, **47** pp. 460-463.
- Auletta G., 2000. *Foundations and Interpretation of Quantum Mechanics*, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong.
- Axon T. J., 1989. "Introducing Schrödinger's cat in the laboratory", *Am. J. Phys.*, **57** pp. 317-321.
- Baggott J., 1992. *The meaning of quantum theory*, Oxford University Press, Oxford.

- Ballentine L. E., 1970. "The Statistical Interpretation of Quantum Mechanics", *Rev. Mod. Phys.*, **42** pp. 358-381.
- Ballentine L. E., 1972. "Einstein's Interpretation of Quantum Mechanics", *Am. J. Phys.*, **40** pp. 1763-1771.
- Ballentine L. E., Jarrett J. P., 1987. "Bell's Theorem: Does Quantum mechanics contradict relativity?", *Am. J. Phys.*, **55** pp. 696-701.
- Barut A. O., 1992. "How to Avoid Quantum Paradoxes", *Found. Phys.*, **22** pp. 137-142.
- Beige A. et al., 2000. "Bell's inequality test with entangled atoms ", *Phys. Rev. A*, **62** pp. 052102 1-9.
- Belinfante F. J, 1973. *A Survey of Hidden-Variables Theories*, Pergamon Press, Oxford.
- Bell J. S., 1964. "On the Einstein-Podolskj-Rosen paradox", *Physics*, **1** pp. 195-200.
- Bell J. S., 1966. "On the Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics", *Rev. Mod. Phys.*, **38** pp. 447-452.
- Bell J. S., 1987. *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Ben-Dov Y., 1990. "Everett's theory and the many-worlds interpretation", *Am. J. Phys.*, **58** pp. 829-832.
- Bennett C. H. et al., 1993. "Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolskj-Rosen channels", *Phys. Rev. Lett.*, **70** pp. 1895-1899.
- Bergou J. A., 1999. "Entangled Fields in Multiple Cavities as a Testing Ground for Quantum Mechanics", *Found. Phys.*, **29** pp. 503-519.
- Bernardini C., 1991. *Relatività speciale, Problemi fisici nello spazio-tempo di Einstein*, La Nuova Italia Scientifica, Roma.
- Bernstein H.J., 1999. "Simple Version of the Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) Argument Against Local Realism", *Found. Phys.*, **29** pp. 521-525.
- Bertlmann R. A., 1990. "Bell's Theorem and the Nature of Reality", *Found. Phys.*, **20** pp. 1191-1212.
- Bitsakis E., 1992. *Basi della fisica moderna. La svolta neorealistica nella fisica moderna*, Edizioni Dedalo, Bari.
- Blokhintsev D. I., 1968. *The Philosophy of Quantum Mechanics*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland.
- Bohm D., 1951. *Quantum theory*, Englewood Cliff, Prentice Hall, N. J.

- Bohm D., 1952. "A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of Hidden Variables, I and II", *Phys. Rev.*, **85** pp. 166-179, 180-193.
- Bohm D., 1984. *Causality and Chance in Modern Physics*, Routledge, London. Trad. it.: *Causalità e Caso nella fisica moderna*, CUEN, Napoli 1997.
- Bohm D., Aharonov Y., 1957. "Discussion of Experimental Proof for the Paradox of Einstein, Rosen and Podolsky", *Phys. Rev.*, **108** pp. 1070-1076.
- Bohm D., Hiley B., 1975. "On the Intuitive Understanding of Nonlocality as Implied by Quantum Theory", *Found. Phys.*, **5** pp. 93-109.
- Bohm D., Hiley B., 1984. "Measurement Understood Through the Quantum Potential Approach", *Found. Phys.*, **14** p. 255-274.
- Bohm D., Hiley B., 1993. *The undivided universe*, Routledge, London and New York.
- Bohm D., Hiley B., Kaloyerou P. N., 1987. "An Ontological Basis for Quantum Theory", *Phys. Rep.*, **144** pp. 321-375.
- Bohm D., Hiley B., 1989. "Non-Localilty and Locality in the Stochastic Interpretation of Quantum Mechanics", *Phys. Rep.*, **172** pp. 93-122.
- Bohm D., Vigier J. P., 1954. "Model of the Causal Interpretation of Quantum Theory in Terms of a Fluid with Irregular Fluctuations", *Phys. Rev.*, **96** pp. 208-216.
- Bohr N., 1935. "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered complete?", *Phys. Rev.*, **48** pp. 696-702.
- Bohr N., 1949. "Discussione con Einstein sui problemi epistemologici della fisica atomica", in *Autobiografia scientifica*, Bollati Boringhieri, Torino 1979. Tit. originale: *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*, a cura di P. A. Schilpp, The Library of Living Philosophers, Evanston, Ill. 1949.
- Boniolo G., 1997. *Filosofia della fisica*, Bruno Mondadori, Milano.
- Boschi D. et al., 1998. "Experimental realization of teleporting an unknown pure quantum state via dual classical and EPR channels", *Phys. Rev. Lett.*, **80** pp. 1121-1125.
- Boschi D., De Martini F., Di Giuseppe G., 1997. "Test of the violation of local realism in quantum mechanics without Bell inequalities", *Phys. Lett. A*, **228** pp. 208-214.
- Bouwmeester D. et al., 1999. "Observation of Three-Photon Greenberger-Horne-Zeilinger Entanglement", *Phys. Rev. Lett.*, **82** pp. 1345-1349.
- Braunstein S. L., Mann A., Revzen M., 1992. "Maximal Violation of Bell Inequalities for Mixed States", *Phys. Rev. Lett. A*, **68** pp. 3259-3261.

- Brown H. R., Dewdney C., Horton G., 1995. "Bohm Particles and Their Detection in the Light of Neutron Interferometry", *Found. Phys.*, **25** pp. 329-347.
- Brown H. R., Svetlichny G., 1990. "Nonlocality and Gleason's Lemma. Part I. Deterministic theories", *Found. Phys.*, **20** pp. 1379-1387.
- Bruno M., D'Agostino M., Maroni C., 1977. "Measurement of Linear Polarization of Positron Annihilation Photons", *Nuovo Cimento B*, **40** pp. 143-152.
- Cabello A., Garcia-Alcaine G., 1996. "Bell-Kochen-Specker theorem for any finite dimension $n \geq 3$ ", *J. Phys. A*, **29** pp. 1025-1036.
- Cabello A., Estebarez J. M., Garcia-Alcaine G., 1996. "Bell-Kochen-Specker theorem: A proof with 18 vectors", *Phys. Lett. A*, **212** pp. 183-187.
- Cabello A., Estebarez J. M., Garcia-Alcaine G., 1996. "New variants of Bell-Kochen-Specker theorem", *Phys. Lett. A*, **218** pp. 115-118.
- Cantelaube Y., 1984. "Possible experimental test of photon non-locality from a one-photon state", *Phys. Lett. A*, **101** pp. 7-10.
- Cereda J. L., 1996. "Maximally entangled states and the Bell inequality", *Phys. Lett. A*, **212** pp. 123-129.
- Chiao, R. Y., Kwiat P. G., Steinberg A. M., 1995. "Quantum Nonlocality in Two-photon Experiments at Berkeley", *Quantum and Semiclassical Optics*, **7** pp. 259-278.
- Chuang I. L., Yamamoto Y., 1995. "Simple quantum computer", *Phys. Rev. A*, **52** pp. 3489-2496.
- Cini M., 1999. "Quantum Mechanics without Waves: A Generalization of Classical Statistical Mechanics", *Ann. Phys.*, **273** pp. 99-113.
- Cirac J. I., Zoller P., 1994. "Preparation of macroscopic superpositions in many-atom systems", *Phys. Rev. A*, **50** pp. R2799-2802.
- Cirel'son B.S., 1980. "Quantum generalizations of Bell's inequality", *Lett. Math. Phys.*, **4** pp. 93-100.
- Clauser J. F., 1971. "Von Neumann's Informal Hidden-Variable Argument", *Am. J. Phys.*, **39** pp. 1095-1099.
- Clauser J. F., 1976. "Experimental investigation of a polarization correlation anomaly", *Phys. Rev. Lett.*, **36** pp. 1223-1226.
- Clauser J. F., Horne M. A., 1974. "Experimental consequences of objective local theories", *Phys. Rev. D*, **10** pp. 526-535.
- Clauser J. F., Horne M. A., Shimony A., Holt R., 1969. "Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories", *Phys. Rev. Lett.*, **23** pp. 880-884.
- Clauser J. F., Shimony A., 1978. "Bell's theorem: experimental tests and implications", *Rep. Prog. Phys.*, **41** pp. 1881-1927.

- Clifton R., 1993. "Getting contextual and nonlocal elements-of-reality the easy way", *Am. J. Phys.*, **61** pp. 443-447.
- Clifton R., 2000. "Complementarity between position and momentum as a consequence of Kochen-Specker arguments", *Phys. Lett. A*, **271** pp. 1-7.
- Clifton R., Niemann P., 1992. "Locality, Lorentz invariance, and linear algebra: Hardy's theorem for two entangled spin- s particles", *Phys. Lett. A*, **166** pp. 177-184.
- Colodny R.G., Editor, 1972. *Paradigms and Paradoxes-The philosophical Challenge of the Quantum Domain*, University of Pittsburgh Press, Pittsburgh,
- Combourieu M.C., Rauch H., 1992. "The Wave-Particle Dualism in 1992: A Summary", *Found. Phys.*, **22** pp. 1403-1433.
- Corwin T. M., 1984. "Quantum mechanics and separability", *Am. J. Phys.*, **52** pp. 371-372.
- Costa De Beauregard O., 1977. "Time Symmetry and the Einstein Paradox", *Il Nuovo Cimento*, **42** pp. 41-64.
- Costa De Beauregard O., 1983. "Running backwards the Mermin device: Causality in EPR correlations", *Am. J. Phys.*, **51** pp. 513-516.
- Croca J.R., 1987. "An experiment for detection of empty waves", *Phys. Lett. A*, **124** pp. 22-26.
- Cufaro-Petroni N., Vigier J.P., 1983. "Dirac's Aether in Relativistic Quantum Mechanics", *Found. Phys.*, **13** pp. 253-286.
- Cufaro-Petroni N., Vigier J.P., 1992. "Single-Particle Trajectories and Interferences in Quantum Mechanics", *Found. Phys.*, **22** pp. 1-40.
- Cushing J.T., McMullin E., 1989. *Philosophical Consequences of Quantum Theory*, University of Notre Dame Press, Notre Dame, Indiana,
- Czachor M., 1994. "Bell theorem without inequalities: A single-particle formulation", *Phys. Rev. A*, **49** pp. 2231-2240.
- Davidon W. C., 1976. "Quantum Physics of Single Systems", *Il Nuovo Cimento*, **36** pp. 34-39.
- de Broglie L., Lochak G., Beswick J. A., Vassalo-Pereira J., 1976. "Present, Predicted, and Hidden Probabilities", *Found. Phys.*, **6** pp. 3-14.
- de Broglie L., Schrödinger E., Heisenberg W., 1991. *Onde e particelle in armonia*, raccolta di scritti a cura di S. Boffi, Jaca Book, Milano.
- de la Pena L., Cetto A. M., Brody T. A., 1972. "On Hidden-Variable Theories and Bell's Inequality", *Lett. Nuovo Cimento*, **5** pp. 177-181.
- de la Torre A. C., 1994. "Contextuality in quantum systems", *Am. J. Phys.*, **62** pp. 808-812.

- Deltete R., Guy R., 1990. "Einstein's opposition to the quantum theory", *Am. J. Phys.*, **58** pp. 673-683.
- de Muynck W. M., 1986. "The Bell inequalities and their irrelevance to the problem of locality in quantum mechanics", *Phys. Lett. A*, **114** pp. 65-67.
- d'Espagnat B., 1975. "Use of the inequalities for the experimental test of a general conception of the foundation of microphysics", *Phys. Rev. D*, **11** pp. 1424-1435.
- d'Espagnat B., 1980. "La teoria dei quanti e la realtà", in *Le scienze, quaderni*, **33** pp. 13-30.
- d'Espagnat B., 1984. "Non separability and the tentative descriptions of reality", *Phys. Rep.*, **4** pp. 201-264.
- Dewdney C., 1988. "Nonlocally Correlated Trajectories in Two-Particle Quantum Mechanics", *Found. Phys.*, **9** pp. 867-887.
- Dewdney C. et al., 1985. "Time-Dependent Neutron Interferometry: Evidence against Wave Packet Collase?", *Found. Phys.*, **15** pp. 1031-1041.
- Dewdney C., Hardy L., Squires E.J., 1993. "How late measurement of quantum trajectories can fool a detector", *Phys. Lett. A*, **184** pp. 6-11.
- Dewdney C., Hiley B. J., 1982. "A Quantum Potential Description of One-Dimensional Time-Dependent Scattering from Square Barriers and Square Wells", *Found. Phys.*, **12** pp. 27-48.
- Dewdney C. et al., 1992. "Wave-Particle Dualism and the Interpretation of Quantum Mechanics", *Found. Phys.*, **22** pp. 1217-1265.
- DeWitt B., 1970. "Quantum mechanics and reality", *Physics Today*, September pp. 30-35.
- Dicke R. H., 1981. "Interaction-free quantum measurement: A paradox?", *Am. J. Phys.*, **49** pp. 925-930.
- Dieks D., 1982. "Communication by EPR devices", *Phys. Lett. A.*, **92** pp. 271-272.
- Diner S., Fargue D., Lochak G. Selleri F., editors, 1984. *The Wave-Particle Dualism*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland.
- Dotson A. C., 1986. "Bell's theorem and the features of physical properties", *Am. J. Phys.*, **54** pp. 218-221.
- Du Marchie van Voorthuysen E. H., 1996. "Realization of an interaction-free measurement of the presence of an object in a light beam", *Am. J. Phys.*, **64** pp. 1504-1507.
- Dürr S., Nonn T., Rempe G., 1998. "Origin of quantum-mechanical complementarity probed by which-way experiment in an atom interferometer", *Nature*, **395** pp. 33-37.

- Durt T., 1997. "Three Interpretations of the Violation of Bell's Inequalities", *Found. Phys.*, **27** pp. 415-435.
- Eberhard P. H., 1977. "Bell's Theorem without Hidden Variables", *Il Nuovo Cimento*, **38** pp. 75-80.
- Eberhard P. H., 1978. "Bell's Theorem and the Different Concepts of Locality", *Il Nuovo Cimento B*, **46** pp. 392-419.
- Eberhard P. H., 1993. "Background level and counter efficiencies required for a loophole-free Einstein-Podolsky-Rosen experiment", *Phys. Rev. A*, **47** pp. 747-750.
- Eberhard P. H., Rosselet P., 1995. "Bell's Theorem Based on a Generalized EPR Criterion of Reality", *Found. Phys.*, **25** pp. 91-111.
- Eichmann U. et al., 1993. "Young's Interference Experiment with Light Scattered from Two Atoms", *Phys. Rev. Lett.*, **70** pp. 2359-2362.
- Einstein A., 1949. "Replica alle osservazioni di vari autori", in *Autobiografia scientifica*, Bollati Boringhieri, Torino 1979. Tit. originale: *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*, a cura di P. A. Schilpp, The Library of Living Philosophers, Evanston, Ill. 1949.
- Einstein A., Podolsky B., Rosen N., 1935. "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?", *Phys. Rev.*, **47** pp. 777-780.
- Einstein A., Tolman R. C., Podolsky B., 1931. "Knowledge of past and future in quantum mechanics", *Phys. Rev.*, **37** pp. 780-781.
- Elby A., 1990 "Nonlocality and Gleason's Lemma. Part 2. Stochastic Theories", *Found. Phys.*, **11** pp. 1389-1397.
- Elitzur A. C., Vaidman L., 1993. "Quantum Mechanical Interaction-Free Measurement", *Found. Phys.*, **23** pp. 987-997.
- Everett H. III, 1957. "Relative State Formulation of Quantum Mechanics", *Rev. Mod. Phys.*, **29** pp. 454-462.
- Faraci G., Gutkowski S., Notarrigo S., Pennisi A. R., 1974. "An experimental test of the EPR paradox", *Lett. al Nuovo Cimento*, **9** pp. 607-611.
- Ferrero M., Marshall T. W., Santos E., 1990. "Bell's theorem: Local realism versus quantum mechanics", *Am. J. Phys.*, **58** pp. 683-688.
- Feynman R., 1982. "Simulating Physics with Computers", *Int. J. Theor. Phys.*, **21** pp. 467-489.
- Feynman R., Leighton R., Sands M., 1965. *The Feynman Lectures on Physics* Vol. III, Addison Wesley, Reading.
- Fine A., 1982. "Hidden Variables, Joint Probability, and the Bell Inequalities", *Phys. Rev. Lett.*, **48** pp. 291-295.

- Fortunato D., 1976. "A Property of the Projection Operator Associated to a Mixture of the Second Type", *Lett. Nuovo Cimento*, **15** pp. 289-290.
- Franson J. D., 1989. "Bell Inequality for Position and Time", *Phys. Rev. Lett.*, **62** pp. 2205-2208.
- Freedman S. J., Clauser J. F., 1972 "Experimental test of local hidden-variable theories", *Phys. Rev. Lett.*, **28** pp. 938-941.
- Freistadt H., 1957. "The Casual Formulation of Quantum Mechanics of Particles", *Suppl. Nuovo Cimento*, **5** pp. 1-70.
- Frenkel A., 2002. "A Tentative Expression of the Kàrolyhàzy Uncertainty of the Space-Time Structure Through Vacuum Spreads in Quantum Gravity", *Found. Phys.*, **32** pp. 751-771.
- Fry E. S., Thompson R. C., 1976. "Experimental test of local hidden-variable theories", *Phys. Rev. Lett.*, **37** pp. 465-468.
- Furry W. H., 1936. "Note on the Quantum-Mechanical Theory of Measurement", *Phys. Rev.*, **49** pp. 393-399.
- Garola C., 1992. "Quantum Logics seen as Quantum Testability Theories", *Int. J. Theor. Phys.*, **31** pp. 1639-1651.
- Garola C., 1993. "Semantic incompleteness of Quantum Physics and EPR-like paradoxes", *Int. J. Theor. Phys.*, **32** pp. 1863-1873.
- Garola C., 1995. "Criticizing Bell: local realism and Quantum Physics reconciled", *Int. J. Theor. Phys.*, **34** pp. 253-263.
- Garola C., 1995. "Questioning nonlocality: an operational critique to Bell's Theorem", in: Garola C., Rossi A., editors, *The Foundations of Quantum Mechanics-Historical Analysis and Open Questions*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, pp. 273-285.
- Garola C., 1997. *Against "Paradoxes": a New Quantum Philosophy for Quantum Mechanics*, preprint, Università di Lecce, Lecce.
- Garola C., 1998a. *Objectivity versus Nonobjectivity in Quantum Mechanics*, preprint, Università di Lecce, Lecce.
- Garola C., 1998b. *The Bell-Kochen-Specker theorem revisited*, preprint, Università di Lecce, Lecce.
- Garola C., 1998c. *Is Quantum Physics contextual?*, preprint, Università di Lecce, Lecce.
- Garola C., Rossi A., editors, 1995. *The Foundations of Quantum Mechanics-Historical Analysis and Open Questions*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

- Garuccio A., 1978. "Generalized Inequalities Following from Einstein Locality ", *Lett. al Nuovo Cimento*, **23** pp. 559-565.
- Garuccio A., Rapisarda V., 1981. "A Comparison Between Deterministic and Probabilistic Local Hidden-Variable Theories ", *Lett. al Nuovo Cimento*, **30** pp. 443-448.
- Garuccio A., Rapisarda V., Vigier J. P., 1982. "New experimental set for the detection of de Broglie Waves ", *Phys. Lett. A.*, **90** pp. 17-19.
- Garuccio A., Selleri F., 1978. "On the Equivalence of Deterministic and Probabilistic Local Theories ", *Lett. al Nuovo Cimento*, **23** pp. 555-558.
- Garuccio A. et al., 1996. "Experimental test of Selleri's variable photodetection-probability model ", *Phys. Rev. A*, **53** pp. 2944-2947.
- Gerry C. C., 1996. "Nonlocality of a single photon in cavity QED ", *Phys. Rev. A*, **53** pp. 4583-4586.
- Ghirardi G. C., 1997. *Un'occhiata alle carte di Dio*, il Saggiatore, Milano.
- Ghirardi G. C., Rimini A., Weber T., 1986. "Unified dynamics for microscopic and macroscopic systems", *Phys. Rev. D*, **34** pp. 470-491.
- Ghirardi G. C., Rimini A., Weber T., 1988. "The puzzling entanglement of Schrödinger's wave function", *Found. Phys.*, **18** pp. 1-27.
- Ghose P., 1999. *Testing Quantum Mechanics on New Ground*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Ghose P., Home D., 1992. "Wave-Particle Duality of Single-Photon States", *Found. Phys.*, **22** pp. 1435-1447.
- Gibbins P., 1987. *Particles and paradoxes*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Gillespie D. T., 1986. "Untenability of simple ensemble interpretations of quantum measurement probabilities", *Am. J. Phys.*, **54** pp. 889-894.
- Gisin N., 1999. "Bell inequality for arbitrary many settings of the analyzers", *Phys. Lett. A*, **260** pp. 1-3.
- Gisin N., Gisin B., 1999. "A local hidden variable model of quantum correlation exploiting the detection loophole", *Phys. Lett. A*, **260** pp. 323-327.
- Gisin N., Peres A., 1992. "Maximal violation of Bell's inequality for arbitrarily large spin", *Phys. Lett. A*, **162** pp. 15-17.
- Gleason A., 1957. "Measures on the closed subspaces of a Hilbert space", *J. Math. and Mech.*, **6** pp. 885-893.
- Goldin E., 1982. *Waves and Photons*, John Wiley & Sons, New York.
- Goldstein S., 1994. "Nonlocality without inequalities for almost all entangled states for two particles", *Phys. Rev. Lett.*, **72** p. 1273.

- Goss Levi B., 1991. "Atoms are the new wave in interferometers", *Physics Today*, July pp. 17-20.
- Gottfried K., 2000. "Two-particle interference", *Am. J. Phys.*, **68** pp. 143-147.
- Greenberger D. M., Horne M. A., Zeilinger A., 1989. "Going beyond Bell's Theorem", in Kafatos M., ed. *Bell's theorem, quantum theory and conceptions of the universe*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Greenberger D. M., Horne M. A., Shimony A., Zeilinger A., 1990. "Bell's Theorem without inequalities", *Am. J. Phys.*, **58** pp. 1131-1143.
- Gudder S., 1970. "On hidden-variable theories", *J. Math. Phys.*, **11** pp. 431-436.
- Guerra F., 1981. "Structural Aspects of Stochastic Mechanics and Stochastic Field Theory", *Phys. Rep.*, **77** pp. 263-312.
- Hacyan S., 1997. "Test of Bell's inequalities with harmonic oscillators", *Phys. Rev. A*, **55** pp. R2492-R2494.
- Hacyan S., 1997. "Bell's inequality violation with four entangled fermions", *Phys. Rev. A*, **56** pp. R2489-R2490.
- Hannaout M., Hoyt S., Kryowonos A., Widom A., 1998. "Quantum measurement theory and the Stern-Gerlach experiment", *Am. J. Phys.*, **66** pp. 377-379.
- Hardy L., 1991. "N-measurement Bell inequalities, N-atom entangled states and the nonlocality of one photon", *Phys. Lett. A*, **160** pp. 1-8.
- Hardy L., 1992a. "On the existence of empty waves in quantum theory", *Phys. Lett. A*, **167** pp. 11-16.
- Hardy L., 1992b. "A quantum optical experiment to test local realism", *Phys. Lett. A*, **167** pp. 17-23.
- Hardy L., 1993. "Non locality for two particles without inequalities for almost all entangled states", *Phys. Rev. Lett.*, **71** pp. 1665-1668.
- Hardy L., 1994. "Nonlocality of a single photon revisited", *Phys. Rev. Lett.*, **73** pp. 2279-2283.
- Hardy L., 1998. "Spooky action at a distance in quantum mechanics", *Cont. Phys.*, **39** pp. 419-429.
- Hardy L., Song D. D., 1999. "No signalling and probabilistic quantum cloning", *Phys. Lett. A*, **259** pp. 331-333.
- Hardy L., Squires E. J., 1992. "On the violation of Lorentz-invariance in deterministic hidden-variable interpretations of quantum theory", *Phys. Lett. A*, **168** pp. 169-173.
- Haroche S., 1998. "Entanglement, decoherence and the quantum/classical boundary", *Physics Today*, July pp. 36-42.

- Haroche S., Kapper D., 1989. "Cavity quantum electrodynamics", *Physics Today*, January pp. 24-30.
- Harrison D., 1982. "Bell's inequality and quantum correlations", *Am. J. Phys.*, **50** pp. 811-815.
- Hegerfeldt G. C., 1974. "Remark on causality and particle localization", *Phys. Rev. D*, **10** pp. 3320-3321.
- Heisenberg, W., 1961. *Fisica e filosofia*, il Saggiatore, Milano. Tit. orig.: *Physics and Philosophy*, 1958.
- Helliwell T. M., Konkowski D. A., 1983. "Causality paradoxes and nonparadoxes: Classical superluminal signals and quantum measurements", *Am. J. Phys.*, **51** pp. 996-1003.
- Herbert N., 1982. "FLASH-A superluminal communicator based upon a new kind of quantum measurement", *Found. Phys.*, **12** pp. 1171-1179.
- Heywood P., Redhead M. L. G., 1983. "Nonlocality and the Kochen-Specker Paradox", *Found. Phys.*, **13** pp. 481-499.
- Hiley B. J., Peat F. D., editors, 1987. *Quantum Implications - Essays in honour of David Bohm*, Routledge & Kegan Paul, London and New York.
- Hoffmann M., 1990. "A Local Realistic Explanation of EPR Correlations", *Found. Phys.*, **20** pp. 991-1003.
- Holladay W., 1993. "A simple quantum erase", *Phys. Lett. A*, **183** pp. 280-282.
- Holladay W., 1998. "The nature of particle-wave complementarity", *Am. J. Phys.*, **66** pp. 27-33.
- Holland P. R., 1993. *The Quantum Theory of Motion*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Home D., 1997. *Conceptual Foundations of Quantum Physics*, Plenum Press, New York.
- Home D., Selleri F., 1991. "Bell's Theorem and EPR Paradox", *Riv. Nuovo Cimento*, **14** pp. 1-95.
- Home D., Sengupta S., 1983. "Heisenberg's gedanken experiment revisited", *Am. J. Phys.*, **51** pp. 567-569.
- Home D., Sengupta S., 1984. "Bell's Inequality and Non-Contextual Dispersion-Free States", *Phys. Lett. A*, **120** pp. 159-162.
- Horne M. A., Shimony A., Zeilinger A., 1989. "Two-particle interferometry", *Phys. Rev. Lett.*, **62** pp. 2209-2212.
- Ivanovic I. D., 1978. "On Complex Bell's Inequality", *Lett. Nuovo Cimento*, **22** pp. 14-16.

- Jammer M., 1974. *The Philosophy of Quantum Mechanics*, John Wiley & Sons, New York.
- Jammer M., 1988. "David Bohm and His Work-On the Occasion of His Seventieth Birthday", *Found. Phys.*, **18** pp. 691-699.
- Jauch J.M., 1973. *Are Quanta Real? A Galileian Dialogue*, Indiana University Press. Trad. it.: *Sulla realtà dei quanti. Un dialogo galileiano*, Adelphi, Milano 1996.
- Jeffers S., Sloan J., 1994. "An experiment to detect empty waves", *Found. Phys. Lett.*, **7** pp. 333-340.
- Jordan T. F., 1983. "Quantum Correlations Do Not Transmit Signals", *Phys. Lett. A*, **94** p. 264.
- Jordan T. F., 1994. "Quantum mysteries explored", *Am. J. Phys.*, **62** pp. 874-880.
- Kafatos M., 1989. *Bell's theorem, quantum theory and conceptions of the universe*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Kar G., 1997. "Hardy's nonlocality for mixed states", *Phys. Lett. A*, **228** pp. 119-120.
- Kasday L. R., Ullman J. D., Wu C. S., 1970. "The Einstein-Podolsky-Rosen argument: positron annihilation experiment", *Bull. Am. Phys. Soc.*, **15** p. 586.
- Kasday L. R., Ullman J. D., Wu C. S., 1975. "Angular Correlation of Compton-Scattered Annihilation Photons and Hidden Variables", *Nuovo Cimento B*, **25** pp. 633-661.
- Kaufherr T., 1985. "A new approach to the Einstein-Podolskj-Rosen paradox", *Found. Phys.*, **15** pp. 1043-1051.
- Kernaghan M., 1994. "Bell-Kochen-Specker theorem for 20 vectors", *J. Phys. A*, **27** pp. L829-L830.
- Kernaghan M., Peres A., 1995. "Kochen-Specker theorem for eight-dimensional space", *Phys. Lett. A*, **198** pp. 1-5.
- Khrennikov A., 2002. "Frequency Analysis of the EPR-Bell Argumentation", *Found. Phys.*, **32** pp. 1159-1174.
- Kochen S., Specker E., 1967. "The problem of hidden variables in quantum mechanics", *J. Math. and Mech.*, **17** pp. 59-88.
- Kocher C. A., Commins E. D., 1967. "Polarization correlation of photons emitted in an atomic cascade", *Phys. Rev. Lett.*, **18** pp. 575-577.
- Krips H., 1975. "Statistical Interpretation of quantum theory", *Am. J. Phys.*, **43** pp. 420-422.
- Kunstatter G., Trainor L. E. H., 1984. "For whom the bell tolls", *Am. J. Phys.*, **52** pp. 598-602.

- Kwiat P. G., Eberhard H., Steinberg A. M., Chiao R. Y., 1994. "Proposal for a loophole-free Bell inequality experiment", *Phys. Rev. A*, **49** pp. 3209-3220.
- Kwiat P. G., Hardy L., 2000. "The mystery of quantum cakes", *Am. J. Phys.*, **68** pp. 33-36.
- Kwiat P. G. et al., 1995. "New High-Intensity Source of Polarization-Entangled Photon Pairs", *Phys. Rev. Lett.*, **75** pp. 4337-4341.
- Kwiat P. G., Steinberg A. M., Chiao R. Y., 1992. "Observation of a quantum eraser: A revival of coherence in a two-photon interference experiment", *Phys. Rev. A*, **45** pp. 7729-7739.
- Kwiat P. G., Steinberg A. M., Chiao R. Y., 1993. "High-Visibility Interference in a Bell-Inequality Experiment for Energy and Time", *Phys. Rev. A*, **47** pp. R2472-R2475.
- Kwiat P. G., et al., 1990. "Correlated two-photon interference in a dual-beam Michelson interferometer", *Phys. Rev. A*, **41** pp. 2910-2913.
- Kwiat P. G., Weinfurter H., Zeilinger A., 1997. "Vedere nel buio con la meccanica quantistica", *Le scienze*, **342** pp. 64-70.
- Lam M. M., Dewdney C., 1990. "Locality and nonlocality in correlated two-particle interferometry", *Phys. Lett. A*, **150** pp. 127-135.
- Landau L. J., 1987. "On the Violation of Bell's Inequality in Quantum Theory", *Phys. Lett. A*, **120** pp. 54-56.
- Leggett A. J., 1984. "Schrödinger's Cat and her Laboratory Cousins", *Cont. Phys.*, **25** pp. 599-606.
- Leonhardt U., 1997. *Measuring the Quantum State of Light*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Lochak G., 1976. "Has Bell's Inequality a General Meaning for Hidden-Variable Theories?", *Found. Phys.*, **6** pp. 173-184.
- Loudon R., 1983. *The quantum theory of light*, Clarendon Press, Oxford.
- Mandel L., 1995. "Indistinguishability in One-Photon and Two-Photon Interference", *Found. Phys.*, **25** pp. 211-218.
- Margenau H., 1944. "The exclusion principle and its philosophical importance", *Philosophy of Science*, **11** pp. 187-208.
- Mermin N. D., 1981. "Bringing home the atomic word: Quantum Mysteries for anybody", *Am. J. Phys.*, **49** pp. 940-943.
- Mermin N. D., 1985. "Is the Moon there when nobody looks?-Reality and the quantum theory", *Phys. Today*, April pp. 38-47.
- Mermin N. D., 1990a. "Simple Unified Form for the Major No-Hidden-Variables Theorems", *Phys. Rev. Lett.*, **65** pp. 3373-3376.

- Mermin N. D., 1990b. “Extreme Quantum Entanglement in a Superposition of Macroscopically Distinct States”, *Phys. Rev. Lett.*, **65** pp. 1838-1840.
- Mermin N. D., 1990c. “Quantum mysteries revisited”, *Am. J. Phys.*, **58** pp. 731-734.
- Mermin N. D., 1990d. “What’s wrong with these elements of reality?”, *Phys. Today*, **43** pp. 9-11.
- Mermin N. D., 1993. “Hidden variables and the two theorems of John Bell”, *Am. J. Phys.*, **65** pp. 803-815.
- Mermin N. D., 1994. “Quantum mysteries refined”, *Am. J. Phys.*, **62** pp. 880-887.
- Mielnik B., 1990. “The Paradox of Two Bottles in Quantum Mechanics”, *Found. Phys.*, **20** pp. 745-755.
- Milonni P. W., Hardies M. L., 1982. “Photons cannot always be replicated”, *Phys. Lett. A*, **92** pp. 321-322.
- Munro W.J., Reid M. D., 1993. “Violation of Bell’s inequality by macroscopic states generated via parametric down-conversion ” *Phys. Rev. A*, **47** pp. 4412-4421.
- Nachman P., 1994. “Mach-Zehnder interferometer as an instructional tool”, *Am. J. Phys*, **63** pp. 39-43.
- Nelson E., 1966. “Derivation of the Schrödinger Equation from Newtonian Mechanics”, *Phys. Rev.*, **150** pp. 1079-1085.
- Newton T. D., Wigner E., 1949. “Localized States for Elementary Systems”, *Rev. Mod. Phys.*, **21** pp. 400-406.
- Ortoli S., Pharabod J. P., 1991. *Il cantico dei quanti*, Edizioni Theoria, Roma. Tit. orig.: *Le Cantique des quantiques*, 1984.
- Ou Z. Y., Mandel L., 1988. “Violation of Bell’s Inequality and Classical Probability in a Two-Photon Correlation Experiment”, *Phys. Rev. Lett.*, **61** pp. 50-53.
- Ou Z. Y., Pereira S. F., Kimble H. J., Peng K. C., 1988. “Realization of the Einstein-Podolskj-Rosen Paradox for Continuous Variables”, *Phys. Rev. Lett.*, **61** pp. 3663-3666.
- Ou Z. Y., Zou X. Y., Wang L. J., Mandel L., 1990. “Observation of Nonlocal Interference in Separated Photon Channels”, *Phys. Rev. Lett.*, **65** pp. 321-324.
- Pagonis C., Clifton R., 1992. “Hardy’s nonlocality theorem for n spin- $\frac{1}{2}$ particles”, *Phys. Lett. A*, **168** pp. 100-102.
- Pais A., 1982. *Subtle is the Lord*, Oxford University Press, Oxford. Trad. it.: *Sottile è il Signore*, Boringhieri, Torino 1986.
- Parkins A. S., Marte P., Zoller P., Kimble H. J., 1993. “Synthesis of Arbitrary Quantum States via Adiabatic Transfer of Zeeman Coherence”, *Phys. Rev. Lett.*, **71** pp. 3095-3098.

- Pati A. K., 2000. "Probabilistic exact cloning and probabilistic no-signalling", *Phys. Lett. A*, **270** pp. 103-107.
- Pearle P. M., 1970. "Hidden-Variable Example Based upon Data Rejection", *Phys. Rev. D*, **2** pp. 1418-1425.
- Penrose R., 1989. *The emperor's new mind*, Oxford University Press, Oxford. Trad. it.: *La mente nuova dell'imperatore*, Rizzoli, Milano 1992.
- Penrose R., 1994. *Shadows of the Minds*, Oxford University Press, Oxford. Trad. it.: *Ombre della mente*, Rizzoli, Milano 1996.
- Peres A., 1978. "Unperformed experiments have no results", *Am. J. Phys*, **46** pp. 745-747.
- Peres A., 1986. "Existence of Free Will as a Problem of Physics", *Found. Phys.*, **16** pp. 573-584.
- Peres A., 1990. "Incompatible results of quantum measurements", *Phys. Lett. A*, **151** pp. 107-108.
- Peres A., 1991. "Two simple proofs of the Kochen-Specker theorem", *J. Phys. A*, **24** pp. L175-L178.
- Peres A., 1995. "Nonlocal Effects in Fock Space" *Phys. Rev. Lett.*, **74** p. 4571.
- Peres A., Zurek W. H., 1982. "Is quantum theory universally valid?", *Am. J. Phys.*, **50** pp. 807-810.
- Philippidis C., Dewdney C., Hiley B. J., 1979. "Quantum Interference and the Quantum Potential", *Il Nuovo Cimento B*, **52** pp. 15-28.
- Popper K. R., 1984. *Poscritto alla logica della scoperta scientifica- III. La teoria dei quanti e lo scisma nella fisica*, il Saggiatore, Milano. Tit. orig.: *Quantum Theory and the Schism in Physics from the Postscript to the Logic of Scientific Discovery*.
- Rarity J. G., Tapster P. R., 1990a. "Two-color photons and nonlocality in fourth-order interference", *Phys. Rev. A*, **41** pp. 5139-5147.
- Rarity J. G., Tapster P. R., 1990b. "Experimental Violation of Bell's Inequality Based on Phase and Momentum", *Phys. Rev. A*, **64** pp. 2495-2498.
- Rauch H., 1986. "Neutron interferometry tests of quantum mechanics", *Cont. Phys.*, **27** pp. 345-360.
- Rietdijk C. W., Selleri F., 1984. "Proof of a Quantum Mechanical Nonlocal Influence", *Found. Phys.*, **15** pp. 303-317.
- Romer R. H., 1991. "Editorial: John S. Bell (1928-1990), the man who proved Einstein was right", *Am. J. Phys.*, **59** pp. 229-300.
- Ryff L. C., 1997. "Bell and Greenberger, Horne, and Zeilinger theorems revisited", *Am. J. Phys.*, **65** pp. 1197-1199.

- Sakurai J. J., 1985. *Modern Quantum Mechanics*, The Benjamin/Cummings Publishing Company. Trad. it.: *Meccanica quantistica moderna*, Nicola Zanichelli Editore, Bologna 1990, pp. 220-228.
- Sánchez-Gómez J. L., Unturbe J., 1999. "Gravitationally induced decoherence in macroscopic systems", *Found. Phys. Lett.*, **12** pp. 233-250.
- Santos E., 1991. "Interpretation of the Quantum Formalism and Bell's Theorem", *Found. Phys.*, **21** pp. 221-241.
- Scherer H., Busch P., 1993. "Problem of signal transmission via quantum correlations and Einstein incompleteness in quantum mechanics", *Phys. Rev. A*, **47** pp. 1647-1651.
- Schmidt M., Selleri F., 1991. "Empty-wave effects on particle trajectories in triple-slit experiments", *Found. Phys. Lett.*, **4** pp. 1-17.
- Schrödinger E., 1935. "Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik", *Naturwissenschaften*, **23** pp. 807-812; 823-828; 844-849. Trad. inglese: "The present situation in quantum mechanics", *Proc. Am. Phil. Soc.*, **124** 1980, pp. 323-328.
- Schrödinger E., 1957. *Mind and Matter*, Cambridge University Press.
- Schulman L. S., 1971. "Tachyon Paradoxes", *Am. J. Phys.*, **39** pp. 481-484.
- Scully M. O., 1983. "How to make quantum mechanics look like a hidden-variable theory and vice versa", *Phys. Rev. D*, **28** pp. 2477-2484.
- Scully M. O., Drühl K., 1982. "Quantum eraser: A proposed photon correlation experiment concerning observation and "delayed choice" in quantum mechanics", *Phys. Rev. A*, **25** pp. 2208-2213.
- Scully M. O., Englert B. G., Walther H., 1991. "Quantum optical tests of complementarity", *Nature*, **351** pp. 111-116.
- Scully M. O., Walther H., 1989. "Quantum optical test of observation and complementarity in quantum mechanics", *Phys. Rev. A*, **39** pp. 5229-5236.
- Selleri F., 1972. "A Stronger Form of Bell's Inequality", *Lett. al Nuovo Cimento*, **3** pp. 581-582.
- Selleri F., 1978. "On the consequences of Einstein Locality", *Found. Phys.*, **8** pp. 103-116.
- Selleri F., 1987. *Paradossi e realtà. Saggio sui fondamenti della microfisica*, Laterza, Bari.
- Selleri F., 1988. *La Causalità impossibile*, Jaca Book, Milano.
- Selleri F., 1989. *Fisica senza dogma. La conoscenza scientifica tra sviluppo e regressione*, Edizioni Dedalo, Bari.

- Selleri F., editor, 1992. *Wave-Particle Duality*, Plenum Press, New York.
- Selleri F., 1997. "Incompatibility between local realism and quantum mechanics for pairs of neutral kaons", *Phys. Rev. A*, **56** pp. 3493-3506.
- Selleri F., Tarozzi G., 1980. "Is Clauser and Horne's Factorability a Necessary Requirement for a Probabilistic Local Theory?", *Lett. al Nuovo Cimento*, **29** pp. 533-536.
- Selleri F., Zeilinger A., 1988. "Local Deterministic Description of Einstein-Podolskj-Rosen Experiments", *Found. Phys.*, **18** pp. 1141-1159.
- Shih Y. H., Alley C. O., 1988. "New Type of Einstein-Podolskj-Rosen-Bohm Experiment Using Pairs of Light Quanta Produced by Optical Parametric Down Conversion", *Phys. Rev. Lett.*, **61** pp. 2921-2924.
- Shih Y. H., Rubin M. H., 1993. "Four photon interference experiment for the testing of the Greenberger-Horne-Zeilinger theorem", *Phys. Lett. A*, **182** pp. 16-22.
- Shih Y. H., Sergienko A. V., 1994. "Observation of quantum beating in a simple beam-splitting experiment: Two-particle entanglement in spin and space-time", *Phys. Rev. A*, **50** pp. 2564-2568.
- Shih Y. H., Sergienko A. V., Rubin M. H., 1993. "Einstein-Podolsky-Rosen state for space-time variables in a two-photon interference experiment", *Phys. Rev. A*, **47** pp. 1288-1293.
- Shimony A., 1993. *Search for a naturalistic world view-II. Natural science and metaphysics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Silverman M. P., 1992. "More than one mystery: Quantum interference with correlated charged particles and magnetic fields", *Am. J. Phys.*, **61** pp. 514-523.
- Squires E. J., 1992. "Explicit collapse and superluminal signals", *Phys. Lett. A*, **163** pp. 356-358.
- Stapp H. P., 1975. "Bell's Theorem and World Process", *Il Nuovo Cimento*, **29** pp. 270-276.
- Stapp H. P., 1977. "Are Superluminal Connections Necessary?", *Il Nuovo Cimento*, **40** pp. 191-205.
- Stapp H. P., 1979. "Whiteheadian Approach to Quantum Theory and the Generalized Bell's Theorem", *Found. Phys.*, **9** pp. 1-25.
- Stapp H. P., 1980. "Locality and Reality", *Found. Phys.*, **10** pp. 767-795.
- Stapp H. P., 1985. "Bell's theorem and the foundations of quantum physics", *Am. J. Phys.*, **53** pp. 306-316.
- Strekalov D. V., Pittman T. B., Sergienko A. V., Shih Y. H., 1996. "Postselection-Free Energy-Time Entanglement", *Phys. Rev. A*, **54** pp. R1-R4.

- Sutherland R. I., 1985. "A Corollary to Bell's Theorem", *Il Nuovo Cimento*, **88** pp. 115-118.
- Szabó L. Z., Fine A., 2002. "A local hidden variable theory for the GHZ experiment", *Phys. Lett. A*, **295** pp. 229-240.
- Tan S. M., Walls D. F., Collett M. J., 1991. "Non locality of a Single Photon", *Phys. Rev. Lett.*, **66** pp. 252-255.
- Tapster P. R., Rarity J. G., Owens P. C. M., 1994. "Violation of Bell's Inequality over 4 km of Optical Fiber", *Phys. Rev. Lett.* , **73** pp. 1922-1926.
- Teller P., 1995. *An Interpretive Introduction to Quantum Field Theory*, Princeton University Press, Princeton.
- Tipler F. J., 1984. "Cosmology and the pilot wave interpretation of quantum mechanics", *Phys. Lett. A*, **103** pp. 188-192.
- Tittel W., Brendel J., Zbinden H., Gisin N., 1998. "Violation of Bell Inequalities by Photons More Than 10 km Apart", *Phys. Rev. Lett.*, **81** pp. 3563-3566.
- Torgerson J. R., Branning D., Monken C. H., Mandel L., 1995. "Experimental demonstration of the violation of local realism without Bell inequalities", *Phys. Lett. A*, **204** pp. 323-328.
- Uchiyama S., 1995. "Local Reality: Can It Exist in the EPR-Bohm Gedanken Experiment?", *Found. Phys.*, **25** pp. 1561-1575.
- Unnikrishnan C. S., 2002. "Is the quantum mechanical description of physical reality complete? Proposed resolution of the EPR puzzle", *Found. Phys. Lett.*, **15** pp. 1-25.
- Unruh W. G., 1976. "Notes on black-hole evaporation", *Phys. Rev. D*, **14** pp. 870-892.
- Vaidman L., 1999. "Variations on the Theme of the Greenberger-Horne-Zeilinger Proof", *Found. Phys.*, **29** pp. 615-630.
- Vogel K., Akulin V. M., Schleich W. P., 1993. "Quantum State Engineering of the Radiation Field", *Phys. Rev. Lett.*, **71** pp. 1816-1819.
- Von Neumann J., 1932. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg. Trad. it.: *I fondamenti matematici della meccanica quantistica*, il Poligrafo, Padova 1998.
- Weihs G. et al., 1998. "Violation of Bell's Inequality under Strict Einstein Locality Conditions", *Phys. Rev. Lett.*, **81** pp. 5039-5043.
- Wheeler J. A., 1957. "Assessment of Everett's Relative State Formulation of Quantum Theory", *Rev. Mod. Phys.*, **29** pp. 463-465.
- Wheeler J. A., 1982. "The computer and the Universe", *Int. J. Theor. Phys.*, **21** pp. 557-573.

- Wheeler J. A., Zurek W. H., 1983. *Quantum theory and measurement*, Princeton University Press, Princeton.
- Wigner E., 1963. "The Problem of Measurement", *Am. J. Phys.*, **31** pp. 6-15.
- Wigner E., 1970. "On Hidden Variables and Quantum Mechanical Probabilities", *Am. J. Phys.*, **38** pp. 1005-1009.
- Wiseman H. M. et al. 1997. "Nonlocal momentum transfer in *welcher weg* measurement", *Phys. Rev.*, **56** pp. 55-75.
- Wòdkiewicz K., 1995. "Non-local and local ghost fields in quantum correlations", *Cont. Phys.*, **36** pp. 139-147.
- Wootters W. K., Zurek W., 1979. "Complementarity in the double-slit experiment: Quantum nonseparability and a quantitative statement of Bohr's principle", *Phys. Rev. D*, **19** pp. 473-484.
- Wootters W. K., Zurek W., 1982. "A single quantum cannot be clonated", *Nature*, **299** pp. 802-803.
- Wu C. S., Shaknov I., 1950. "The Angular Correlation of Scattered Annihilation Radiation", *Phys. Rev.*, **77** p. 136.
- Youssef. S., 1995. "Is complex probability theory consistent with Bell's theorem?", *Phys. Lett. A*, **204** pp. 181-187.
- Yurke B., Stoler D., 1992. "Bell's-inequality experiments using independent-particle sources", *Phys. Rev. A*, **46** pp. 2229-2234.
- Yurke B., Stoler D., 1993. "Using the Pauli exclusion principle to exhibit local-realism violations in overlapping interferometers", *Phys. Rev. A*, **47** pp. 1704-1707.
- Yurke B., Stoler D., 1995. "Bell's-inequality experiment employing four harmonic oscillators", *Phys. Rev. A*, **51** pp. 3437-3444.
- Zimba J., 1998. "Simple realism and canonically conjugate observables in non-relativistic quantum mechanics ", *Found. Phys. Lett.*, **11** pp. 503-533.
- Zou X. Y., Grayson T., Wang L. J., Mandel L., 1992. "Can an Empty de Broglie Pilot Wave Induce Coherence?", *Phys. Rev. Lett.*, **68** pp. 3667-3669.
- Zou X. Y., Wang L. J., Mandel L., 1991. "Induced Coherence and Indistinguishability in Optical Interference", *Phys. Rev. Lett.*, **67** pp. 318-321.
- Żukowski M., 1990. "Two-particle spatial quantum beats: feasible test of Bell's inequalities", *Phys. Lett. A*, **150** pp. 136-141.
- Żukowski M., 1991. "Definite values for observables versus quantum predictions: a GHZ-like test", *Phys. Lett. A*, **157** pp. 198-202.
- Żukowski M., 1993. "Bell theorem involving all settings of measuring apparatus", *Phys. Lett. A*, **177** pp. 290-296.

Żukowski M., Zeilinger A., Horne M. A., Ekert A. K., 1993. "Event-Ready-Detectors Bell Experiment via Entanglement Swapping", *Phys. Rev. Lett.*, **71** pp. 4287-4290.

Zurek H. W., 1991. "Decoherence and the transition from quantum to classical", *Phys. Today*, October pp. 36-44.